

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS

VOLUME XXXIII

No. 3

President: F. A. F. C. WENT

Secretary: B. BROUWER

---

CONTENTS

- J. VERSLUYS: "The origin of artesian pressure", p. 214.  
JAN DE VRIES: "Eine gewisse Kongruenz von Kegelschnitten", p. 223.  
R. WEITZENBÖCK: "Ueber die Invarianten bei eingliedrigen Gruppen", p. 227.  
R. WEITZENBÖCK: "Die Endlichkeit der Invarianten von kontinuierlichen Gruppen linearer Transformationen", p. 232.  
W. H. KEESOM and J. N. VAN DEN ENDE: "The specific heat of solid substances at the temperatures obtainable with the aid of liquid helium. II. Measurements of the atomic heats of lead and of bismuth", p. 243.  
J. DE SMEDT, W. H. KEESOM and H. H. MOOY: "On the Crystal structure of Neon", p. 255.  
W. J. DE HAAS, EDM. v. AUBEL and J. VOOGD: "On the supra-conductivity of alloys", p. 258.  
W. J. DE HAAS and J. VOOGD: "The influence of magnetic fields on superconductors", p. 262.  
L. S. ORNSTEIN, J. WOUDE and Miss J. G. EYMERS: "On the Thermodynamics of Caoutchouc. II. Temperature-change of rubber under adiabatic stretching", p. 273.  
F. M. JAEGER: "The Dimorphism of Gallium-Acetylacetonate", p. 280.  
ERWIN BÜNNING: "Ueber die Reizbewegungen der Staubblätter von *Sparmannia africana*", (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT), p. 284.  
C. G. G. VAN HERK: "Ueber Differentialinvarianten einer verallgemeinerten GALILEI-NEWTON-Gruppe" III. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 295.  
M. J. VAN UVEN: "Adjustment of  $N$  Points (in  $n$ -dimensional Space) to the best linear ( $n-1$ )-dimensional Space". II. (Communicated by Prof. A. A. NIJLAND), p. 307.  
L. SCHUBNIKOW: "Ueber die Herstellung von Wismuteinkristallen". (Communicated by Prof. W. J. DE HAAS), p. 327.  
G. SCHAAKE: "Eine Transformation des  $\infty^6$ -Systemes der rationalen biquadratischen Raumkurven, die durch fünf gegebene Punkte gehen." Communicated by Prof. JAN DE VRIES), p. 332.

**Geology.** — *The origin of artesian pressure.* By J. VERSLUYS.

(Communicated at the meeting of March 29, 1930.)

Underground water is called artesian water, and it is said to have artesian pressure if its pressure head is sufficient to lift it to a level higher than the surface of the ground (24). This conception prevailed in the beginning of the nineteenth century in France where many artesian wells were drilled at that time (1, 2, 3). From a theoretic standpoint the meaning of the term artesian is not very essential. Suppose the pressure head of a certain layer varies little or not over a great area. Then, if the surface of the earth is rolling at certain places the pressure head may, but at other places may not be able to make the water rise higher than the surface. In low places there may be artesian water in relatively shallow sands, while at adjacent spots where the surface of the ground is higher, artesian water only occurs in deeper sands or does not exist at all. Consequently the water of a layer may be artesian at one place and may not be so at some distance.

A question of preponderant importance from a theoretic point of view is, whether or not the pressure head of the water increases with depth. That means, whether the water of deeper strata will rise higher than shallow water. In digging a well at a depth which as a rule is not very great, water will be encountered which fills the well to a certain level. At this level the phreatic surface has been reached and the water flowing into the well is phreatic water. This water occurs as well in sandy as in clayish formations, the difference being only that the coarser the texture of the ground the faster water will flow into the well. In real sands a well may be drilled deeper without showing any variation of pressure head. As soon as a less permeable layer has been passed however, the water of deeper sands may have a different pressure head. The pressure head of such water may be either greater or smaller than for the phreatic water. In valleys as a rule the pressure head increases at every less permeable layer which is passed and this may also be the case in plains or low-lying tracts, offset by hills or mountains. This phenomenon also often occurs in coastal plains gradually rising to inland hills or mountains.

In case there are only strata of a finer texture, we may meet this increase of pressure head with depth also in valleys and plains, without any real change of texture with depth, but generally such is not observed. Water will fill wells, drilled into a clay or a loam, so slowly, that one can hardly get any water from it and measurements are seldom done. In case however two sands with different pressure heads are separated from each



other by a clayish, so called impervious layer, then the pressure head in the clay will gradually change with depth in the clay.

As it has been stated before, in very pervious strata difference of pressure head with depth will be negligible. As soon as there are less pervious strata or an alternation of more and less pervious strata, the variations of pressure head with depth may be considerable and the occurrence of artesian pressure will often be the result.

The occurrence of artesian water and more generally the increase of pressure head with depth, means an upward motion of water. Generally speaking, the lateral motion in the more pervious strata will be many times faster than the upward motion, while in the less pervious strata, if they are intercalated with more pervious layers, the lateral motion will be very slow, even negligible compared to the vertical motion. So artesian regions are districts where ground water from depth rises and tends to join the phreatic water, which is either drained solely by rivers, canals, lakes or by the ocean, or also partly and exceptionally entirely by capillarity and vegetation which ultimately means evaporation.

In the same way, regions where the reverse occurs, when pressure head in deeper strata is smaller than in shallow layers and where in any point at depth of a vertical pressure head is too small to enable the water to rise to the point of intersection of the vertical with the phreatic surface, all groundwater has a downward motion.

According to these principles, the author's conception of underground water conditions, as they were developed in 1914 (7) is a dynamic one, and it would not preclude the occurrence of artesian water, even in formations which consist of so called impervious strata. An increase of pressure head with depth is, as it will be explained hereafter, promoted by the presence of lenses of more pervious material and still more by persistent pervious strata, f.i. sheet sands.

The origin of artesian pressure was in 1691 explained by BERNARDINI RAMAZZINI (*De fontium mutinensium admiranda scaturigine physico-hydrostaticus*, Modena, 1691). DAUBRÉE (6, p. 153) gave an illustration of the phenomenon according to RAMAZZINI's explanation like figure 2.



Fig. 1.

In the beginning of the nineteenth century a great number of artesian wells had been drilled in France and in England and knowledge of artesian water had increased. In 1822 (1) F. GARNIER gave an illustration of a persistent pervious layer interstratified between impervious layers outcropping in a high-lying tract and extending under a plain. (Fig. 3.) The

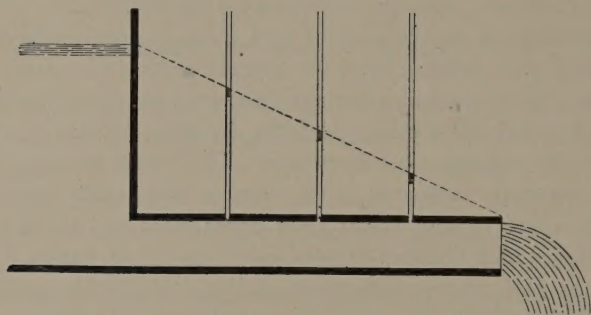


Fig. 2.

intake area which would feed the artesian water by percolation of atmospheric water, would only be the narrow zone of the outcrop of the artesian aquifer.

The explanation of GARNIER and RAMAZZINI implied a dynamic condition. In 1834 ARAGO (3) compared the artesian water with water in a *U*-tube. ARAGO did not add any illustration to his description, but his idea was the origin of figure (1) which is very popular. This conception which was inspired by the artesian basin of Paris, is less general than the

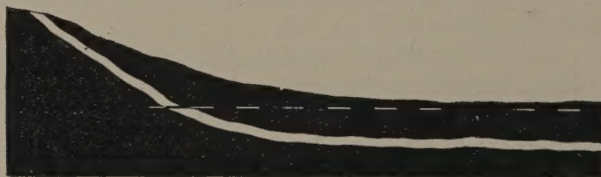


Fig. 3.

theory of RAMAZZINI and GARNIER and it does not so well elucidate the dynamic condition of artesian water.

In 1893 some doubt arose about the theory of RAMAZZINI and GARNIER regarding the conditions of artesian water in Queensland and New South Wales (23, pp. 412 and 413). All the artesian wells in these countries derive their supplies of water from sands and fine gravels of the lower cretaceous formation. In Queensland the total outflow of all the wells was estimated to be greater than the volume of water which could be replenished by atmospheric water percolating in the area of the outcrop



The artesian water of Batavia (D. E. I) was till 1911 supposed to be supplied by three sheetsands, and according to the general dip of the strata, the outcrops of these sands were supposed to be approximately known. The conception perfectly accorded with GARNIER's idea (Fig. 3). In 1911 however as cross sections were drawn through the numerous artesian wells, it appeared that there were no persistent sands at all. The sands were lenticular and the various lenses were not very extensive. In 1914 the writer (7) developed his principles concerning the motion of underground water, in which pressure-differentials were explained. It appeared that alternation of strata of different permeability is not necessary for giving rise to an increase of pressure head with depth and to artesian pressure. Only, as has previously been mentioned, alternation of more and less permeable strata yields favorable conditions, not only for the detection, but also for the rate of increase of pressure with depth. The author's conception, in case there are real persistent sheet sands, does not limit the area which recharges the so called "aquifer" to its outcrop. The word "aquifer" and synonymous expressions are generally applied to the more pervious layers, as such layers are the main bearers of horizontal movement of water. They are the only layers really giving evidence of pressure differences and yielding water in an appreciable quantity to a well. We must however not lose sight of the fact, that less permeable, so called impermeable strata, contain water as well as the "aquifers" and under a similar pressure head.

Movement of underground water is controlled by the same fundamental law as the conductivity of electricity and provided the boundary conditions are steady, also as the conduction of heat. In comparing flow of underground water to conduction of heat, temperature must be taken for pressure head. Lines of equal temperature coincide with lines of equal pressure head, and lines of flow are the same for groundwater and heat.

Suppose a sheet of a conductive material, with two plane faces, lies horizontally on a non-conductive material (see Fig. 4). In the upper face

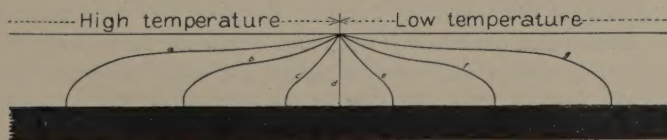


Fig. 4.

the temperature is constantly kept at a high temperature on one side of a certain straight line, and at a low temperature on the other side of the line. Heat will flow through the conductive sheet from the portion where temperature is high at the surface to the other, and lines of equal temperatures will be somewhat like the curves in Fig. 4. These curves show different temperatures, highest in *a*, lowest in *g*. So here we see in

the portion of the sheet where temperature at the upper face is low, an increase of temperature with depth, in the portion of high temperature at the face on the contrary temperature decreases with depth.

Such conditions f.i. are prevalent in Holland where deeper polders are in contact with polders of smaller depth, or with canals and lakes. But as a rule with underground water, conditions are somewhat different. Assume the non-conductive solid, which is the base of the conductive sheet, has a protuberance as shows Fig. 5, and the conductive sheet again makes contact with the face of the basal solid. The upper face of the conductive

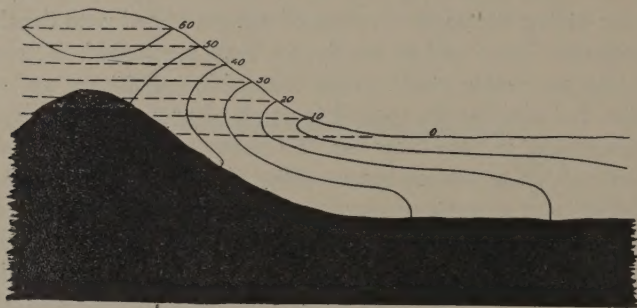


Fig. 5.

sheet has a bump over the protuberance of the non-conductive solid. The low-lying horizontal portion of the face is constantly kept at a temperature zero, while in the protuberance temperature at the face increases directly as the elevation. The intersection of the lines of equal temperature with the plane of cross section (Fig. 5) will be formed like the curves in the diagram and the figures at each curve indicate the respective temperatures. On the right side of the protuberance temperature increase with depth. Suppose, instead of the conductive material there is a sheet of loam or clay, which is exposed to the atmosphere and its precipitation. In the protuberance, water from rain, snow and mist partly percolates. Due to the resistance, the clay exerts on the water as it flows, the clay will be saturated with water to a level which generally is not much below the surface at any point. So the phreatic surface will have a shape not much deviating from the surface of the ground. The flat part of the surface in Fig. 5 corresponds to the low-lying tracts. In such tracts there are as a rule riverbeds, which drain the ground to a certain level, which varies with the seasons. In plains outside riverbeds, as a rule water also will percolate, till it reaches the phreatic surface which has a slope towards the riverbeds. In this part of the territory however at depth groundwater will rise and also be drained by the riverbeds. In plains the shape of the phreatic surface is largely controlled by riverbeds. The surface of equal pressure head are shaped like the curves which as long as we were dealing with heat, were the lines of equal temperature in Fig. 5.



It is not necessary to adapt the examples still more to what takes place in nature. The possibility of an increase of pressure head with depth being arising in a homogeneous formation has been elucidated. In case the homogeneous formation is very permeable like sand, in the protuberance or the hill, water would sink so easily that the phreatic surface would not be much higher than in the plain. Hence very permeable formations are unfavorable for the occurrence of pressure head with depth.

Theoretically, increase of pressure head with depth may occur in homogenous formations, which are not very permeable, provided the surface of the earth is rolling or inclined, and the formation is not very pervious. Further such increase of pressure head is promoted by lenses and still more by persistent layers of more permeable sediments. If such lenses or layers fail, generally little attention is devoted to the pressure of ground-water and it will not at an appreciable rate flow out of wells. As it has previously been explained, artesian pressure is merely a not infrequent excess of the described phenomenon.

Adopting "rockpressure" to explain artesian pressure, as it was done by R. HAY (19) in 1890, later on by J. W. GREGORY (20), is not at all necessary, not even if the bearer of artesian water does not outcrop or if the artesian water occurs in lenses. If artesian pressure were caused by rockpressure, taking water from artesian wells would imply a subsidence of the surface, as it has been recognized by several authors, although subsidence caused by artesian wells has not been proven (11 and 12).

Such subsidence is possible, due to the fact that clay strata can be compressed as long as a film of absorbed water separates the solid particles (25). This has actually taken place in the Goose Creek Oil field near Houston (Texas), according to the conception of W. E. PRATT and D. W. JOHNSON (16, see also 17 and 18) which is very plausible. In deep seated oil strata however after a long period of exploitation, pressure decreases several hundred pounds, while in artesian layers, pressure seldom decrease more than 10 or 20 pounds on account of the withdrawal of water. This small decrease of pressure due to artesian wells cannot warrant a considerable compaction of strata, able to counterbalance the huge volumes of water withdrawn from depth by means of artesian wells.

Moreover one must not forget that in many cases pressure has been relieved by erosion. So further compaction of sandstones by variation of pressure which are not enormous would be negligible. Clays may expand again when pressure is relieved, but an appreciable compression can only be caused by a considerable variation of pressure, which generally is not caused by artesian wells, but may caused by exploitation of oil fields.

Artesian "aquifers" will not easily be exhausted. The area which feeds such by percolation of atmospheric water, is much larger than the outcrop zone. As soon as water is withdrawn from the artesian "aquifer" the recharging zone will extend. From a larger area water will flow through other strata to the "aquifer", due to the decrease of pressure. Furthermore

less water will rise from the artesian aquifer to overlying strata, even the flow may be reversed. So by withdrawing water from an "aquifer" direction and speed of flow not only in the "aquifer" itself, but also in other strata will be modified. As it has been stated, more water from underlying strata will flow into the "aquifer", due to the decrease of pressure. This means that water from an area which formerly did not reach the aquifer, now will do so, and it could be said that the recharging area has extended. Water from the artesian "aquifer" partly will escape into the overlying strata. This loss will become smaller, and may even be converted to a gain on account of the decrease of pressure caused by artesian wells.

Flow of underground water mainly takes place in the more pervious layers. Hence in pervious layers connate water will sooner be washed out by water which has percolated from the area which feeds the "aquifer". In 1915 the author recognized this phenomenon in the coastal regions of Holland <sup>1)</sup> (29 and 30). Where fresh water from the coastal dunes is penetrating, sandy strata may contain fresh water, while the clays generally still contain the water from the ocean which had saturated them during a former period. So we must be prudent in basing our conclusions on the chemical analysis of underground water. Evidence of salt water being replaced by fresh water, is presented by the occurrence of so called "alkaline waters" (28) <sup>1)</sup>.

Changes of height of water in the ocean, due to tides, and in rivers and lakes, interfere with pressure of groundwater. Such variations are often observed with artesian waters (7, 21, 22, 31, 32). This phenomenon can easily be explained. The solid material of the strata is practically incompressible

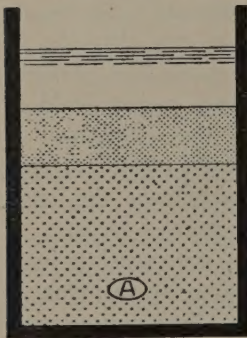


Fig. 6.

within the range in which pressure varies, and the same is true for the water in the pores. Say we fill a reservoir partly with sand, cover this sand with clay, both saturated with water (Fig. 6). The pressure head of the water in the sand at a point A will coincide with the surface of the water in the reservoir. If water is added, the pressure head at A will increase as much as the surface of the water is raised. There is a direct communication and the pressure increases without any displacement of the solid or the liquid. Nevertheless, by some authors the interference of tides with artesian pressure is explained as a consequence of the greater load on the strata, through compression. Generally the variations of artesian head are smaller than the variations of height of water which causes them. This circumstance has also been adopted as a proof of the theory that tides interfere with artesian pressure by changing

<sup>1)</sup> A new article on this subject will soon appear in *Economic Geology*.



the load and compressing the strata. Figure 7 however, shows that such can be explained also without any compression.

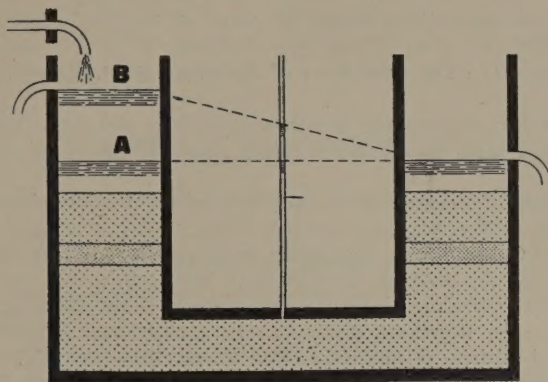


Fig. 7.

#### LITERATURE.

1. F. GARNIER: "De l'art du fontenier sondeur et des puits artésiens", 1822 and "Traité sur les puits artésiens, Paris, 1826.
2. HÉRICART DE THURY: "Considérations géologiques et physiques sur la cause du jaillissement des eaux des puits forés ou fontaines artificielles, etc.", Paris 1829.
3. ARAGO: "Sur les puits forés, connus sous le nom de puits artésiens, de fontaines artésiennes, ou de fontaines jaillissantes". Annuaire pour l'an 1835 présenté au Roi par le bureau des longitudes", pp. 181—258.
4. DÉGOUSSÉE et CH. LAURENT: "Guide du sondeur ou traité théorique et pratique des sondages". Vol. I. 2nd Edition, Paris 1861.
5. H. DARCY: "Les fontaines publiques de la ville de Dijon". Paris 1856.
6. A. DAUBRÉE: "Les eaux souterraines à l'époque actuelle", Vol. I, Paris 1887.
7. J. VERSLUYS: "Contribution à la théorie de l'écoulement de l'eau souterraine". Amsterdam 1914.
8. J. H. GARDNER: "The Mid-Continent Oil Fields", Bulletin Geol. Soc. Am. 28, p. 702, 1906.
9. J. VERSLUYS: "Hydrologisch inzicht". Water en Gas, 1925, pp. 141—143.
10. ———: "De theorie van het artesische water van GARNIER. Water en Gas", 1926, pp. 235 and 237.
11. W. L. RUSSELL: "The origin of artesian pressure". Economic Geology 23, pp. 132—157, 1928.
12. O. E. MEINZER: "Compressibility and elasticity of artesian aquifers". Economic Geology 23, pp. 263—291, 1928.
13. A. M. PIPER: "The origin of artesian pressure". Economic Geology 23, pp. 683—696, 1928.
14. S. TABER: "Effect of earthquakes on artesian waters". Economic Geology 23, pp. 696—697, 1928.
15. CH. TERZAGHI: "The origin of artesian pressure", Economic Geology 24, pp. 94—100, 1929.
16. W. E. PRATT and D. W. JOHNSON: "Local subsidence of the Goose Creek Oil field", Journal of Geology, 34, N<sup>o</sup>. 7, Part 1, pp. 577—590, 1926.

17. L. C. SNIDER: "A suggested explanation for the surface subsidence in the Goose Creek oil and gas field". *Bull. Am. As. Petr. Geol.* **11**, pp. 729—745, 1927.
18. W. E. PRATT: "Some questions on the cause of the subsidence of the surface in the Goose Creek Field, Texas", *Bull. Am. As. Petr. Geol.* **11**, pp. 887—889, 1927.
19. R. HAY: "Artesian wells in Kansas and causes of their flow". *Amer. Geologist*, **5**, pp. 296—301, 1890.
20. J. W. GREGORY: "The dead heart of Australia". JOHN MURRAY, London 1906, pp. 288—289.
21. J. W. VEATCH: "Fluctuations of waterlevel in wells, with special reference to Long Island, N.Y." U.S. Geol. Survey Water supply paper **155**, pp. 62, 63, 65—69, 74, 75, 1906.
22. M. L. FULLER: "Summary of the controlling factors of artesian flows". *U.S. Geol. Survey. Bull.* **319**, p. 33, 1908.
23. T. W. E. DAVID: "Notes on artesian water in New South Wales and Queensland", *Journal of the Royal Society of New South Wales*, **27**, p. 408—431, 1893.
24. J. VERSLUYS: "Wat zijn artesische putten"? *De Ingenieur*, 1926, pp. 805—806.
25. ———: "An hypothesis explaining some characteristics of clay", *Proceedings Royal Academy of Sciences in Amsterdam*, Vol. **30**, pp. 104—112, 1927.
26. ———: "The compacting pressure of sediments". *Proceedings Royal Academy of Sciences in Amsterdam*, Vol. **30**, pp. 1004—1009, 1927.
27. ———: "Synclinal oil and unsaturated strata". *Proceedings Royal Academy of Sciences in Amsterdam*, Vol. **31**, pp. 1086—1090, 1928.
28. ———: "Chemical actions in the subsoil of the dunes". *Proceedings Royal Academy of Sciences in Amsterdam*, Vol. **18**, pp. 1619—1624, 1916.
29. ———: "Hydrologie van het Nederlandsche Kustgebied", *Water*, Vol. **1**, 1917—1918.
30. ———: "Over het duinwater", *Trans. Geol. Section Geol. Mijnb. Gen. for Netherland and its Colonies*, Vol. **2**, pp. 24—30, 1915.
31. ———: "Rapport omtrent het geo-hydrologische onderzoek, verricht in verband met het opmaken van plannen voor een centrale drinkwatervoorziening in de provinciën Zuid-Holland, Noord-Holland en Utrecht", the Hague, 1919.
32. J. H. STEGGEWENTZ: "Bijdrage tot de kennis van den invloed van de getijbeweging op de stijghoogte van het grondwater". *Mededeeling N<sup>o</sup> 9 van het R. V. D. the Hague*, 1929.



**Mathematics.** — *Eine gewisse Kongruenz von Kegelschnitten.* Von  
Prof. JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

§ 1. Die Kegelschnitte  $k^2$  durch den festen Punkt  $C$ , welche die vorgegebenen Kegelschnitte  $\alpha^2$  und  $\beta^2$  je zweimal treffen, bilden eine Kongruenz.

Es sei  $d$  die Schnittgerade der Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  jener Kegelschnitte; sie bildet einen *nodalen*  $k^2$  mit jeder durch  $C$  gelegten Gerade  $c$  der Ebene  $\delta$  ( $Cd$ ).

Die Kegelflächen, welche  $\alpha^2$  und  $\beta^2$  aus  $C$  projizieren, haben vier Geraden  $g_k$  gemein. Jede durch  $g_k$  gelegte Ebene enthält eine Gerade  $h_k$ , welche  $\alpha^2$  und  $\beta^2$  trifft und  $g_k$  zu einer *nodalen*  $k^2$  ergänzt. Weil jeder Punkt der  $g_k$  drei Geraden  $h_k$  trägt, ist der Ort der  $h_k$  eine Regelfläche *vierten* Grades, mit dreifacher Gerade  $g_k$ .

$A_1$  und  $A_2$  seien die Spuren von  $\alpha^2$  in der Ebene  $\beta$ ; jeder Stral  $a$  des Büschels  $(A_1, \beta)$  bez.  $(A_2, \beta)$  wird zu einer *nodalen*  $k^2$  ergänzt durch eine Erzeugende  $e$  des Kegels, welcher  $\alpha^2$  aus  $C$  projiziert. Jede Gerade  $e$  gehört zwei Geradenpaaren,  $(e, a_1)$  bez.  $(e, a_2)$  an.

Analog gibt es zwei Systeme von Geradenpaaren  $(f, b_1)$  und  $(f, b_2)$ , wo  $f$  eine durch  $C$  gelegte,  $\beta^2$  treffende Gerade bezeichnet, indes  $b_1$  bez.  $b_2$  in der Ebene  $\alpha$  liegt und  $\beta^2$  trifft.

Es gibt *sechs* *nodale*  $k^2$ , welche aus zwei Geraden  $g_k$  bestehen.

§ 2. Jede Ebene durch eine, den Punkt  $C$  enthaltende, Gerade  $c$  trägt einen Kegelschnitt  $k^2$ . Der Ort dieser  $k^2$  ist offenbar ein *Monoid*  $M$ . Wenn  $c$  eine  $n$ -fache Gerade von  $M$  ist, so gibt es auf  $M$  bekanntlich  $(n+2)(n+1) - n^2$  nach  $C$  zielende Geraden. Es sind diese die *vier* Geraden  $g$ , *zwei* Geraden  $e$  und *zwei* Geraden  $f$ . Der fragliche Ort ist somit ein  $M^4$ , mit *Doppelgerade*  $c$ .

Demnach trägt ein Punkt des Raumes i. A. *zwei* Kegelschnitte der Kongruenz; diese entspricht daher dem Symbol [2,1].

Wenn die Gerade  $c$  den Kegelschnitt  $\alpha^2$  trifft (Gerade  $e$ ), so ist der Ort der  $k^2$  ein *Dimonoid*  $\triangle^4$ , mit *Doppelgerade*  $c$ ; denn  $e$  bildet *nodale*  $k^2$  mit einem Strale  $a_1$  und einem Strale  $a_2$ , ist somit eine doppelte *torsale* Gerade.

§ 3. Eine *Abbildung* der Kongruenz ergibt sich mittels einer bilinearen Stralenkongruenz und einer Ebene  $\gamma$ , wenn die Spur  $K$  der Sehne  $k$  eines  $k^2$ , welcher die Leitlinieën  $s_1$  und  $s_2$  trifft, als *Bild* jenes  $k^2$  betrachtet wird.

Die Spuren  $S_1$  und  $S_2$  von  $s_1$  und  $s_2$  sind offenbar *singuläre Bildpunkte*. Die Stralen  $k$  des Büschels  $(S_1, S_2)$  gehören den Kegelschnitten  $k^2$  an, welche in den Ebenen durch  $CS_1$  liegen und demnach ein *Monoid*  $M_1^4$  bilden.

Die Spur  $S_0$  der durch  $C$  gelegten Transversale  $k_0$  von  $s_1$  und  $s_2$  ist ebenfalls *singulärer Bildpunkt* und vertritt die  $k^2$  eines *Monoids*  $M_0^4$ .

Schliesslich liefert die in der Ebene  $\delta$  ( $Cd$ ) liegende Gerade  $k$  den *singulären Punkt*  $S_3$ , der die nodalen  $k^2$  der Ebene  $\delta$  abbildet.

Der  $k^2$  in der Ebene  $CS_1S_2$  wird abgebildet auf die Punktreihe der Gerade  $S_1S_2$ .

Das System der *nodalen*  $k^2$  ( $g_k, h_k$ ) wird abgebildet auf die Punkte eines *Kegelschnitts*  $\gamma_k^2$  durch  $S_0, S_1$  und  $S_2$ .

Die Systeme  $(a_k, e)$  und  $(b_k, f)$  werden vertreten durch *Kegelschnitte*  $\alpha_k^2$  bez.  $\beta_k^2$ , welche sämtliche Punkte  $S$  enthalten.

Die  $k^2$  eines *Monoids*  $M^4$  werden abgebildet auf die Punkte eines *Kegelschnitts*  $\gamma^2$  durch  $S_0, S_1$  und  $S_2$ . Jeder  $\gamma^2$  durch jene Punkte ist Bild eines Systems von  $k^2$ , welche eine Gerade  $c$  zweimal treffen.

§ 4. Die  $k^2$ , welche eine Gerade  $l$  schneiden, werden abgebildet auf die Punkte einer Kurve  $\lambda^8$ , welche *vierfache* Punkte hat in  $S_0, S_1, S_2$  und den Punkt  $S_3$  enthält;  $l$  trifft nämlich die *Monoide*  $M_0^4, M_1^4, M_2^4$  je viermal.

Zwei Kurven  $\lambda^8$  haben ersichtlich  $64 - 3 \times 4^2 - 1$ , also 15 Punkte  $K$  gemein; es gibt daher 15 Kegelschnitte  $k^2$ , welche *zwei* beliebig gewählte *Geraden* treffen.

Die  $k^2$ , welche  $l$  schneiden, bilden eine *Fläche*  $\Lambda^{15}$ .

Auf ihr ist  $l$  eine *Doppelgerade* (§ 2), der in  $(Cl)$  liegende Kegelschnitt  $k_0^2$  eine *Doppelkurve* ( $l$  trifft  $k_0^2$  zweimal).

Weil  $l$  das einem Punkte von  $\alpha^2$  bez.  $\beta^2$  entsprechende *Dimonoid*  $\Delta^4$  viermal trifft, sind  $\alpha^2$  und  $\beta^2$  *vierfache Kurven* der  $\Lambda^{15}$ . Die Geraden  $g_k$  sind *vierfach*, denn  $l$  trifft vier  $h_k$ . Die Kegelflächen  $(C, \alpha^2)$  und  $(C, \beta^2)$  liefern je zwei *Doppelgeraden*. Ferner enthält  $\Lambda^{15}$  die Gerade  $d$ , die Transversale durch  $C$  über  $d$  und  $l$ , 16 Geraden  $h$ , 2 Geraden  $a$  und 2 Geraden  $b$ .

Der Schnitt von  $\Lambda^{15}$  mit der Ebene  $(Cl)$  besteht aus der Doppelkurve  $k_0^2$ , der Doppelgerade  $l$ , den Doppelgeraden, welche  $C$  mit den Spuren von  $\alpha^2$  und  $\beta^2$  verbinden und der Transversale durch  $C$  über  $l$  und  $d$ . Eine Gerade durch  $C$  trifft den Schnitt viermal ausserhalb  $C$ ; demnach ist  $C$  *elfacher Punkt* der Fläche  $\Lambda^{15}$ .

Der Schnitt mit der Ebene  $\alpha$  besteht aus der vierfachen Kurve  $\alpha^2$ , der Gerade  $d$ , 3 Geraden  $b_1$  und 3 Geraden  $b_2$ .

§ 5. Eine Ebene  $\varphi$  schneidet ein *Monoid*  $M^4$  bez. ein *Dimonoid*  $\Delta^4$  in einer nodalen Kurve  $k^4$ , von welcher 6 Tangenten nach dem *Doppelpunkt* zielen. Daher enthält die betreffende Fläche *sechs*  $k^2$ , welche  $\varphi$



berühren. Die Bildkurve des Systems der  $k^2$ , welche  $\varphi$  berühren, ist demnach eine  $\varphi^{12}$ , mit sechsfachen Punkten  $S_0, S_1, S_2$ ; sie hat überdies einen Doppelpunkt in  $S_3$ , weil  $\varphi$  einen nodalen  $k^2$  der Ebene  $\delta$  in dessen Doppelpunkte trifft.

Die Kurven  $\varphi^{12}$  ( $S_0^6 S_1^6 S_2^6 S_3^2$ ) und  $\lambda^8$  ( $S_0^4 S_1^4 S_2^4 S_3$ ) haben  $96 - 3 \times 6 \times 4 - 2$ , also 22 Punkte  $K$  gemein. Der Ort der  $k^2$ , welche  $\varphi$  berühren, ist somit eine Fläche  $\Phi^{22}$ , mit sechsfachen Kurven  $\alpha^2$  und  $\beta^2$ .

Weil die Doppelpunkte der Systeme  $(a_k, e)$  und  $(b_k, f)$  je auf einem Kegelschnitt liegen, enthält  $\Phi^{22}$  acht nodale  $k^2$  aus jenen Systemen. Ferner trägt sie noch vier nodale  $k^2$  ( $g_k, h_k$ ) und ein Geradenpaar  $(c, d)$ . Demnach gibt es auf  $\Phi^{22}$  14 Doppelgeraden und 8 vierfache Geraden ( $e_k$  und  $f_k$ ).

Einer beliebigen Gerade  $c$  (durch  $C$ ) entspricht ein Monoid  $M^4$ ; es gibt also 6  $k^2$  von  $\Phi$ , welche  $c$  ausserhalb  $C$  treffen; daher ist  $C$  ein sechszehnfacher Punkt der  $\Phi^{22}$ .

Die Fläche berührt  $\varphi$  in den Punkten einer Kurve  $k^{11}$ . Dieses ergibt sich auch aus folgender Erwägung. Eine Ebene durch eine Gerade  $l$  trifft  $\Lambda^{15}$ , ausser in der Doppelgerade  $l$ , in einer Kurve  $13^{\text{en}}$  Grades; diese trifft  $l$  in deren Schnitten mit  $k_0^2$  und ferner in 11 Punkten, wo eine  $k^2$  jene Ebene berührt.

Weil zwei Kurven  $\varphi^{12}$  ersichtlich  $12^2 - 3 \times 6^2 - 2^2$ , also 32 Punkte  $K$  gemein haben, gibt es 32 Kegelschnitte der Kongruenz, welche zwei Ebenen berühren.

§ 6. Eine andere Abbildung der sprachlichen Kongruenz ergibt sich, wenn man die Punktreihen von  $\alpha^2$  und  $\beta^2$  projektiv bezieht auf zwei Strahlenbüschel  $P(p)$  und  $Q(q)$  einer Bildebene. Einem Kegelschnitte  $k^2$  entsprechen alsdann zwei Stralen  $p$  und zwei Stralen  $q$ ; die Gruppe von 4 Punkten  $K$ , welche jene Paare bestimmen, wird als Bild von  $k^2$  betrachtet.

Es zeigt sich dass  $P$  und  $Q$  singuläre Bildpunkte sind; der Stral  $QP$  entspricht einem bestimmten Punkte  $B$  von  $\beta^2$ ; jede Ebene durch  $B$  und  $C$  enthält einen  $k^2$ , dessen Bildquadrupel den Punkt  $P$ , und zwar zweimal, enthält.

Die nodalen  $k^2$  der Ebene  $\delta$  werden abgebildet auf eine Gruppe von vier singulären Punkten  $S_k$ .

Den Punkten, in denen  $g_k$  die Kurven  $\alpha^2$  und  $\beta^2$  trifft, entspricht ein singulärer Punkt  $S_k^*$ , welcher unendlich vielen Quadrupeln von Bildpunkten angehört, von denen jedes ein Geradenpaar ( $g_k, h_k$ ) vertritt.

Die Geradenpaare  $(a, e)$  und  $(b, f)$  werden abgebildet auf Quadrupel, von denen ein Punktepaar auf einem festen Strale  $p$  bez.  $q$  liegt.

§ 7. Die  $k^2$ , welche eine Gerade  $l$  treffen, erzeugen eine Verwandtschaft (8, 8) zwischen den Strahlenbüscheln um  $P$  und  $Q$ ; denn einem

Strale  $p$  entsprechen vier  $k^2$ , welche  $a^2$  in einem bestimmten Punkte  $A$  treffen, wonach es vier Paare  $q_1, q_2$  gibt, welche  $p$  entsprechen.

Das System dieser  $k^2$  wird somit abgebildet auf eine Kurve  $\lambda^{16} (P^8 Q^8 S_k^{*4} S_k)$ .

Zwei Kurven  $\lambda^{16}$  haben  $16^2 - 2 \times 8^2 - 4 \times 4^2 - 4$ , also 60 Punkte  $K$  gemein; weil diese offenbar 15 Quadrupel bilden, gibt es 15  $k^2$ , welche zwei Geraden treffen.

Die  $k^2$ , welche eine Ebene  $\varphi$  berühren, werden abgebildet auf eine Kurve  $\varphi^{24} (P^{12} Q^{12} S_k^{*6} S_k^2)$ .

---



**Mathematics.** — *Ueber die Invarianten bei eingliedrigen Gruppen.*  
 Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

In einer vor kurzem publizierten Mitteilung <sup>1)</sup> über die Invarianten bei eingliedrigen Gruppen wurde ein Satz ausgesprochen betreffend die Endlichkeit dieser Invarianten. Wie ich nachträglich bemerke, wird aber dort nur eine *Rationalbasis* und keine *Integritätsbasis* für diese Invarianten wirklich aufgestellt. Dies soll hier nachgeholt werden, wobei sich ein interessanter Zusammenhang mit den Semi-Invarianten binärer Formen ergibt.

§ 1.

Ich wähle dieselbe Bezeichnung wie in der oben genannten Mitteilung. In der Normalform handelt es sich um die Ermittlung des allgemeinsten ganzen rationalen Integrals  $F(y_1, y_2, \dots, y_{\mu+1}; z_1, z_2, \dots, z_{\nu+1}; \dots)$  der Differentialgleichung

$$D(F) = \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial F}{\partial y_2} y_3 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_\mu} y_{\mu+1} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial z_1} z_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial z_\nu} z_{\nu+1} \right) + \dots = 0 \quad (1)$$

Ihre allgemeine rationale Lösung wurde bestimmt: sie ist ein Bruch, dessen Nenner ein Potenzprodukt  $y_{\mu+1}^\alpha z_{\nu+1}^\beta \dots$  und dessen Zähler ein Polynom von Invarianten folgender drei Typen wird:

1. der linearen Invarianten  $y_{\mu+1}, z_{\nu+1}, \dots$
2. der Formen  $C_i(y), C_i(z), \dots$
3. der quadratischen Invarianten  $\Delta_{12} = y_\mu z_{\nu+1} - y_{\mu+1} z_\nu, \dots$

Dabei sind die Formen  $C_i(y)$  gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} C_2(y) &= y_{\mu-1} y_{\mu+1} - \frac{1}{2} y_\mu^2 \\ C_3(y) &= y_{\mu-2} y_{\mu+1}^2 - y_{\mu-1} y_\mu y_{\mu+1} + \frac{1}{3} y_\mu^3 \\ &\dots \dots \dots \\ C_\mu(y) &= y_1 y_{\mu+1}^{\mu-1} - \frac{1}{1!} y_\mu y_2 y_{\mu+1}^{\mu-2} + \frac{1}{2!} y_\mu^2 y_3 y_{\mu+1}^{\mu-3} - \dots + \\ &\quad + (-1)^\mu \frac{1}{(\mu-2)!} y_\mu^{\mu-2} y_{\mu-1} y_{\mu+1} - (-1)^\mu \frac{\mu-1}{\mu!} y_\mu^\mu \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und analog für  $C_2(z), C_3(z), \dots, C_\nu(z)$  u.s.f.

<sup>1)</sup> Diese Proceedings, **33**, (1930). Betreffs der hier verwendeten Normalform einer Matrix ist an Literatur noch zu nennen: P. MUTH, *Elementarteiler*, Leipzig (1899), S. 148; H. WEYL, *Mathem. Analyse des Raumproblems*, Berlin (1923), S. 88.

Für  $C_m$  haben wir neben

$$C_m = y_{\mu-m+1} y_{\mu+1}^{m-1} - \frac{1}{1!} y_{\mu} y_{\mu-m+2} y_{\mu+1}^{m-2} + \frac{1}{2!} y_{\mu}^2 y_{\mu-m+3} y_{\mu+1}^{m-3} - \dots + \left. \begin{aligned} &+ (-1)^m \frac{1}{(m-2)!} y_{\mu}^{m-2} y_{\mu-1} y_{\mu+1} - (-1)^m \frac{m-1}{m!} y_{\mu}^m \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

die Rekursionsformel

$$C_m = y_{\mu-m+1} y_{\mu+1}^{m-1} - \frac{1}{1!} y_{\mu} C_{m-1} - \frac{1}{2!} y_{\mu}^2 C_{m-2} - \dots - \left. \begin{aligned} &- \frac{1}{(m-2)!} y_{\mu}^{m-2} C_2 - \frac{1}{m!} y_{\mu}^m \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Wir führen jetzt in (1) statt der  $y_i$ ;  $z_k$ ; ... neue Veränderliche  $a_0, a_1, \dots, a_{\mu}$ ;  $a_0, a_1, \dots, a_{\nu}$ ; ... ein durch die Gleichungen:

$$y_{i+1} = \frac{a_i}{(\mu-i)!} \quad (i=0, 1, 2, \dots, \mu) \quad ; \quad z_{k+1} = \frac{a_k}{(\nu-k)!} \quad (k=0, 1, 2, \dots, \nu); \quad (5)$$

Die Formen  $F(y_i, z_k, \dots)$  gehen dann über in Formen  $S(a_i, a_k, \dots)$  und aus  $D(F)$  wird:

$$O(F) = \left( \frac{\partial S}{\partial a_0} \mu a_1 + \frac{\partial S}{\partial a_1} (\mu-1) a_2 + \dots + \frac{\partial S}{\partial a_{\mu-1}} a_{\mu} \right) + \left. \begin{aligned} &+ \left( \frac{\partial S}{\partial a_0} \nu a_1 + \frac{\partial S}{\partial a_1} (\nu-1) a_2 + \dots + \frac{\partial S}{\partial a_{\nu-1}} a_{\nu} \right) + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

$O(F)=0$  ist aber nichts anderes als die charakteristische Differentialgleichung für Semi-Invarianten der binären Formen <sup>2)</sup>

$$f = \sum_{i=1}^{\mu} \binom{\mu}{i} a_i \xi_1^{\mu-i} \xi_2^i = a_{\xi}^{\mu} \quad ; \quad \varphi = \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} a_k \xi_1^{\nu-k} \xi_2^k = a_{\xi}^{\nu} ; \dots (7)$$

Eine Integritätsbasis für die gesuchten Invarianten  $F$  wird also gegeben durch ein volles System von Semi-Invarianten  $S$  dieser binären Grundformen (7). Die Grade  $\mu, \nu, \dots$  dieser binären Grundformen sind durch die Anzahl der Einsen in den Teilmatrices  $N$  der Normalform der Matrix  $A = \|a_i^k\|$  festgelegt.

Symbolisch sind alle Semi-Invarianten  $S$  der binären Grundformen (7) aufzubauen aus den Klammerfaktoren  $(a\alpha)$  und den Linearfaktoren  $a_2, a_2, \dots$ : jedes  $S$  ist eine projektive Invariante der Formen (7) und der speziellen Linearform  $L = \xi_2$  und umgekehrt. Die Endlichkeit der Invarianten  $S$  und also auch der  $F$  ergibt sich so als spezieller Fall der Endlichkeit von projektiven Invarianten binärer Formen <sup>3)</sup>.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B.: E. B. ELLIOT, Algebra of Quantics, Oxford (1895), S. 112 ff. ["Annihilator" O].

<sup>3)</sup> Hiezu meine "Invariantentheorie", Groningen (1923), S. 219; ferner: H. WEYL, Mathem. Zeitschr. 20 (1924), S. 138, 139 und E. WANNER, Dissertation, Zürich (1926), S. 16.



## § 2.

Wir behandeln zur Verdeutlichung noch zwei Beispiele.

*Beispiel 1.* Sei für  $n=8$   $A(G) = \frac{\partial G}{\partial x_i} a_i^k x_k$  die gegebene infinitesimale Transformation und

$$N = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & 0 & & & \\ & & & & \lambda_1 & 0 & & \\ \hline & & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & & \lambda_2 \end{array} \right\| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

die Normalform der Matrix  $A = \|a_i^k\|$ ;  $\text{Det } |\lambda E - A| = 0$  hat also hier zwei verschiedene Wurzeln:  $\lambda_1$  fünffach,  $\lambda_2$  dreifach. Es ist  $\mu=3$ ,  $\nu=2$ .

Jede  $A$ -Invariante  $G(x)$  geht für die Normalform (8) über in eine  $N$ -Invariante  $F(y)$  und für diese haben wir die Rationalbasis:

$$\left. \begin{aligned} y_4, y_5, y_8 = z_3, \Delta_{12} = y_3 z_3 - y_4 z_2 = y_3 y_8 - y_4 y_7, \\ C_2(y) = y_2 y_4 - \frac{1}{2} y_3^2, C_3(y) = y_1 y_4^2 - y_2 y_3 y_4 + \frac{1}{3} y_3^3 \\ C_2(z) = z_1 z_3 - \frac{1}{2} z_2^2 = y_6 y_8 - \frac{1}{2} y_7^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wobei in den Nennern nur Potenzprodukte  $y_5^\alpha z_3^\beta = y_5^\alpha y_8^\beta$  auftreten.

Die Bestimmung einer Integritätsbasis für die  $N$ -Invarianten  $F(y)$  erfordert die Berechnung eines vollen Systems von Semi-Invarianten  $S$  einer binären kubischen Form

$$f = 6 y_1 \xi_1^3 + 6 y_2 \xi_1^2 \xi_2 + 3 y_3 \xi_1 \xi_2^2 + y_4 \xi_2^3$$

und einer binären quadratischen Form

$$\varphi = 2 y_6 \xi_1^2 + 2 y_7 \xi_1 \xi_2 + y_8 \xi_2^2.$$

Man hat also ein volles System von projektiven Invarianten von  $f$  und  $\varphi$  aufzustellen und in den Kovarianten  $\xi_1, \xi_2$  durch 0,1 zu ersetzen. Es ergeben sich so <sup>1)</sup> 15 Invarianten, also enthält die gesuchte Integritätsbasis, da noch  $y_5$  mit zu zählen ist, 16 Invarianten.

<sup>1)</sup> Vgl. GORDAN—KERSCHENSTEINER, Vorles. über Invariantentheorie II, Leipzig (1887), S. 323.

Beispiel 2. Sei  $n=5$ ,  $\mu=4$ , also

$$N = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{vmatrix}$$

Alle  $N$ -Invarianten  $F(y)$  haben die Rationalbasis:

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= y_3 y_5 - \frac{1}{2} y_4^2 \\ y_5 : C_3 &= y_2 y_5^2 - y_3 y_4 y_5 + \frac{1}{3} y_4^3 \\ C_4 &= y_1 y_5^3 - y_2 y_4 y_5^2 + \frac{1}{2} y_3 y_4^2 y_5 - \frac{1}{8} y_4^4 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Eine Integritätsbasis ergibt sich aus dem vollen System  $\Sigma$  der Semi-Invarianten  $S$  der binären biquadratischen Form  $f = a_\xi^4$ .  $\Sigma$  enthält neben den beiden Invarianten  $i = (ab)^4$  und  $j = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2$  die drei Semi-Invarianten, die man erhält, wenn man in

$$f = a_\xi^4, \quad t = (ab)^2 (cb) a_\xi^2 b_\xi c_\xi^3 \quad \text{und} \quad \Delta = (ab)^2 a_\xi^2 b_\xi^2$$

$\xi_1, \xi_2 = 0, 1$  setzt. Nach (5) bekommt man die fünf Invarianten

$$\left. \begin{aligned} U_4 &= y_1 y_5 - y_2 y_4 + \frac{1}{2} y_3^2 \\ y_5, C_2, C_3 : \\ V_{33} &= y_5 \left( \frac{4}{3} y_1 y_3 - y_2^2 \right) - \frac{2}{3} \left( y_1 y_4^2 - y_2 y_3 y_4 + \frac{1}{3} y_3^3 \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Es ist auch unschwer zu sehen, wie (11) aus (10) berechnet werden kann<sup>5)</sup>. Wir haben nämlich zuerst  $C_4 + \frac{1}{2} C_2^2 = y_5^2 \cdot U_4$ ; setzt man dann  $C_3^2 + \frac{8}{9} C_2^3 = y_5^2 \cdot U_{33}$ , so ist  $U_{33}$  ganz-rational und ergibt:  $U_{33} = \frac{4}{3} C_2 U_4 - y \cdot V_{33}$ .

Bei  $\mu=5$  wäre dieser Uebergang von der Rationalbasis  $S$  zur Integritätsbasis  $\Sigma$  schon viel mühsamer durchzurechnen<sup>6)</sup>, denn  $S$  enthält dann 5,  $\Sigma$  dagegen 83 Formen<sup>7)</sup>. Die Möglichkeit der Ausführung dieses Ueberganges wird im allgemeinen Fall durch den Satz garantiert:

<sup>5)</sup> Vgl. E. B. ELLIOT, l.c. S. 220.

<sup>6)</sup> Auch auf diese Schwierigkeit macht schon ELLIOT aufmerksam, l.c. S. 221.

<sup>7)</sup> GORDAN—KERSCHENSTEINER l.c. S. 240.

Ist  $P$  ein Polynom und die Invariante

$$F = \frac{P(C_i(y), C_i(z), \dots, \Delta_{ik} \dots; y_{\mu+1}, z_{\nu+1}, \dots)}{y_{\mu+1}^\alpha z_{\nu+1}^\beta \dots}$$

ganz in den  $y_i, z_k, \dots$ , so ist auch

$$F = Q(F_1, F_2, \dots, F_r)$$

wo  $Q$  wieder ein Polynom ist und die  $F_i$  ganze rationale Invarianten sind.

Wir haben hier ein Beispiel für einen relativ-ganzen Polynombereich, der zugleich endlicher Integritätsbereich und doch nicht von erster Art ist: die Invarianten  $F$  bilden ein nicht-reguläres System mit endlicher Integritätsbasis <sup>8)</sup>.

---

<sup>8)</sup> Wegen dieser Begriffe vgl. E. NOETHER, Mathem. Ann. **76** (1915), S. 184 ff.



**Mathematics.** — *Die Endlichkeit der Invarianten von kontinuierlichen Gruppen linearer Transformationen.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

*Einleitung.*

Der klassische Beweis HILBERTS<sup>1)</sup> für die Endlichkeit der ganzen rationalen Invarianten  $K$   $n$ -ärer Formen bezüglich der Gruppe aller linearen homogenen Transformationen  $x_i = a_i^k \bar{x}_k$  stützt sich auf den HILBERTschen Basissatz, demzufolge jedes  $K$  sich durch endlich-viele Basisinvarianten  $K_1, K_2, \dots, K_s$  in der Form darstellen lässt

$$K = A_1 \cdot K_1 + A_2 \cdot K_2 + \dots + A_s \cdot K_s,$$

wo die  $A_i$  Polynome der Formenkoeffizienten sind. Aus der transformierten Gleichung

$$\bar{K} = \bar{A}_1 \cdot \bar{K}_1 + \bar{A}_2 \cdot \bar{K}_2 + \dots + \bar{A}_s \cdot \bar{K}_s$$

gelingt es dann die  $n^2$  unabhängigen Transformationskoeffizienten  $a_i^k$  durch Differentiationsprozesse (den  $\Omega$ -Prozess von CAYLEY) wegzuschaffen und eine Darstellung

$$K = A'_1 \cdot K_1 + A'_2 \cdot K_2 + \dots + A'_s \cdot K_s$$

zu erhalten, bei der die  $A'_i$  wieder Invarianten sind.

Dieser Vorgang ist, wie HILBERT selbst angibt<sup>2)</sup>, übertragbar auf Gruppen, "wenn die Koeffizienten der die Gruppe bestimmenden Substitutionen ganze und rationale Funktionen einer gewissen Anzahl von Parametern sind, derart, dass durch Zusammensetzung zweier beliebiger Substitutionen der Gruppe eine Substitution entsteht, deren Parameter bilineare Funktionen der Parameter der beiden ursprünglich ausgewählten Substitutionen sind und wenn es zugleich einen Differenziationsprozess gibt, welcher sich in entsprechender Weise zur Erzeugung der zur vorgelegten Gruppe gehörigen Invarianten verwenden lässt, wie der Differentiationsprozess  $\Omega$  im Falle der zur allgemeinen projektiven Gruppe gehörigen Invarianten".

HILBERT zeigt an derselben Stelle die Anwendbarkeit dieser Methode

<sup>1)</sup> D. HILBERT, "Ueber die Theorie der algebraischen Formen", Mathem. Ann. **36** (1890), p. 473—534.

<sup>2)</sup> Ebenda, p. 532.

für die orthogonale Gruppe und führt als weiteres Beispiel für quaternäre Formen die drei-gliedrige Gruppe von linearen Punkttransformationen an, die eine irreduzible Raumkurve dritter Ordnung ungeändert lassen.

Eine zweite Methode für den Beweis der Endlichkeit von Invarianten hat HURWITZ<sup>3)</sup> gegeben und für die Fälle der projektiven und der orthogonalen Invarianten ausgeführt. Sie entstand aus der für endliche diskrete Gruppen  $\Gamma$  brauchbaren Methode, eine gegebene Form allen Transformationen von  $\Gamma$  zu unterwerfen und aus den transformierten Formen symmetrische Funktionen, insbesondere ihre Summe zu bilden, die dann Invarianten bei  $\Gamma$  sind<sup>4)</sup>.

Bei kontinuierlichen Gruppen geht die Summation über in eine Integration und dass diese für die projektive und orthogonale Gruppe sinnvoll ausführbar ist, konnte HURWITZ nachweisen.

In den letzten Jahren haben im Zusammenhange mit der Darstellungstheorie kontinuierlicher abstrakter Gruppen durch lineare Transformationen I. SCHUR<sup>5)</sup> und H. WEYL<sup>6)</sup> diesen Gedanken von HURWITZ wieder aufgegriffen. Insbesondere konnte WEYL nachweisen, dass die durch ihn verallgemeinerte Methode von HURWITZ für alle halb-einfachen Gruppen brauchbar gemacht werden kann und dass "damit zum erstenmale auf natürliche Weise ein gruppentheoretischer Gültigkeitsbereich für die Invariantentheorie abgegrenzt ist"<sup>7)</sup>.

Ich habe mich nie damit befreunden können, dass man zu derartigen, rein algebraischen Sätzen wie den, betreffend die Existenz einer endlichen Integritätsbasis in Polynomringen bestimmter Art, transzendente Hilfsmittel wie Volumsintegrale, Ueberlagerungsflächen u. dgl. nötig haben sollte. Es kommt dies, um ein einmal von H. WEYL selbst gebrauchtes Wort zu verwenden, einem "mit Kanonen auf Spatzen schießen" gleich.

Es ist nun — wie in dieser Arbeit ausgeführt werden soll — in der Tat möglich, auf rein algebraischem Wege die Endlichkeit der Invarianten für beliebige kontinuierliche Gruppen linearer Substitutionen zu beweisen, nicht nur für halb-einfache Gruppen, wenn man voraussetzt, dass sie für einfache Gruppen gilt. Und zwar beruht der Grundgedanke dieses Beweises einesteils auf einem Theoreme von S. LIE<sup>8)</sup> über auflösbare Gruppen, dessen Beweis wir hier in der von H. WEYL gegebenen Form verwenden<sup>9)</sup>; anderenteils auf dem HILBERTschen Basissatz und dem eingangs erwähnten HILBERTschen Kunstgriff, wobei man sich bezüglich des letzteren auf den infinitesimalen Standpunkt zu stellen hat

<sup>3)</sup> A. HURWITZ, Göttinger Nachr. (1897), p. 71.

<sup>4)</sup> Vgl. etwa H. WEBER, Lehrb. der Algebra II (2. Aufl.) (1899), p. 227 oder ausführlicher: E. NOETHER, Mathem. Ann. **77** (1915), p. 90.

<sup>5)</sup> I. SCHUR, Berliner Ber. (1924), p. 189, 297, 346.

<sup>6)</sup> H. WEYL, Mathem. Zeitschr. **23** (1925), p. 271 und **24** (1925), p. 238 u. 377.

<sup>7)</sup> H. WEYL, Mathem. Zeitschr. **24** (1925), p. 392.

<sup>8)</sup> S. LIE, Christiania (1878). Siehe LIE—ENGEL, Transformationsgruppen I, p. 589, Theorem 105 und III, p. 681, Satz 7.

<sup>9)</sup> H. WEYL, Math. Zeitschr. **24** (1925) p. 376.

statt mit den endlichen Transformationsgleichungen der Gruppe zu operieren.

Der wahre Grund für die Existenz einer endlichen Integritätsbasis für die Invarianten beliebiger kontinuierlicher Gruppen ist dann der, dass sie ganze rationale Funktionen sind, die durch lineare Operatoren (= infinitesimale Transformationen) reproduziert werden oder Null liefern; *diese Reproduktion durch lineare Operatoren liefert die natürliche Abgrenzung der algebraischen Invariantentheorie.*

Auch für die "absoluten" Invarianten allein besteht ein Endlichkeitssatz, was wir hier ebenfalls nachweisen wollen. Hier kann die Integritätsbasis sogar so gewählt werden, dass die Basisinvarianten entweder irreduzibel oder Produkte von relativen Invarianten sind.

Unser Beweis setzt die Endlichkeit der Invarianten bezüglich einfacher Gruppen als bewiesen voraus. Diese Endlichkeit steht nach H. WEYL für alle halb-einfachen, also auch für alle einfachen Gruppen fest. Macht man aber von den WEYLSchen Resultaten keinen Gebrauch, so bleibt ein rein algebraischer Beweis für die Endlichkeit bei einfachen Gruppen noch zu erbringen. Für die drei grossen Klassen der einfachen Gruppen: allgemeine lineare <sup>10)</sup>, orthogonale <sup>10)</sup> und Komplexgruppe <sup>11)</sup> ist dies geschehen. Für die restlichen fünf einzelnen, durch KILLING und CARTAN <sup>12)</sup> aufgestellten einfachen Gruppen von 14, 52, 78, 133 und 248 Parametern ist ein algebraischer Beweis noch ausständig.

## § 1.

Wir setzen voraus, dass die  $r$  infinitesimalen Transformationen

$$A(f) = \frac{\partial f}{\partial x} a_i^k x_k, \quad B(f) = \frac{\partial f}{\partial x} b_i^k x_k, \dots$$

(über  $i$  und  $k$  wird von 1 bis  $n$  summiert) eine kontinuierliche,  $r$ -gliedrige Gruppe  $\mathfrak{G}$  homogener, linearer Transformationen in  $n$  Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  erzeugen.  $\mathfrak{G}$  sei vorläufig weder einfach noch halb-einfach und habe also die Struktur <sup>13)</sup>:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_m. \quad (1)$$

wo  $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_i$  Untergruppen ohne gemeinsame infinitesimale Transformationen sind, deren Gliederzahl also zusammen gleich  $r$  ist. Die  $\mathfrak{G}_i$  sind einfach, wenigstens dreigliedrig, und jede inf. Transf. von  $\mathfrak{G}_i$  ist für  $i \neq k$  mit jeder aus  $\mathfrak{G}_k$  vertauschbar.  $\mathfrak{H}$  ist die grösste, in  $\mathfrak{G}$  enthaltene, auflösbare, invariante Untergruppe. Fehlen die  $\mathfrak{G}_i$  in (1), so ist  $\mathfrak{G}$  auflösbar.

Wir fassen alle  $\mathfrak{G}_i$  zusammen zur halb-einfachen Gruppe  $\mathfrak{G}$  und denken

<sup>10)</sup> D. HILBERT, Mathem. Ann. 36 (1890).

<sup>11)</sup> H. WEYL, Mathem. Zeitschr. 20 (1924), p. 131.

<sup>12)</sup> LIE—ENGEL III, p. 776 und ausführlich: E. CARTAN, Thèse, Paris (1894).

<sup>13)</sup> LIE—ENGEL III, S. 778 und E. CARTAN, Thèse, Paris (1894), S. 53 u. 97.



uns die  $h$  inf. Transf.  $X_h, X_{h-1}, \dots, X_2, X_1$  von  $\mathfrak{S}$  so gewählt, dass für  $i=0, 1, 2, \dots, h-1$  die Untergruppe

$$\mathfrak{S}_i = X_i, X_{i-1}, \dots, X_2, X_1, \mathfrak{G} \quad (\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{G}), \quad i < h \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gleich der Ableitung von  $\mathfrak{S}_{i+1}$  wird. Es ist dann:

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{S}'_h = \mathfrak{S}_{h-1}, \dots, \mathfrak{S}'_{i+1} = \mathfrak{S}_i, \dots, \mathfrak{S}'_1 = \mathfrak{G}; \mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzen wir  $X_{i+1} = A$  und bedeutet  $X$  eine willkürliche inf. Transf. aus  $\mathfrak{S}_i$ , so ist  $[AX]$  wieder in  $\mathfrak{S}_i$  enthalten.

Eine Form  $F(x)$  der Veränderlichen  $x_i$ , für die identisch in allen  $x_i$  die  $r$  Gleichungen gelten

$$A(F) = \alpha \cdot F, \quad B(F) = \beta \cdot F, \dots$$

nennen wir eine  $\mathfrak{G}$ -Invariante.

Die Endlichkeit der  $\mathfrak{G}$ -Invarianten werden wir durch Induktion beweisen: sie sei bewiesen für alle  $\mathfrak{S}_i$ -Invarianten  $f(x)$ , wir werden zeigen, dass sie dann auch für alle  $\mathfrak{S}_{i+1}$ -Invarianten  $F(x)$  gilt. Dabei machen wir also jetzt Gebrauch davon, dass die Endlichkeit für die halb-einfache Gruppe  $\mathfrak{G}$  feststeht <sup>14)</sup>.

Es sei  $f$  eine  $\mathfrak{S}_i$ -Invariante, also  $X(f) = \xi \cdot f$  für jedes  $X$  aus  $\mathfrak{S}_i$ . Es lässt sich zeigen, dass auch noch  $A(f)$  eine  $\mathfrak{S}_i$ -Invariante ist ( $A = X_{i+1}$ ). Wir folgen dabei dem von H. WEYL gegebenen Beweis des LIE'schen Theorems über die Existenz von Invarianten bei auflösbaren Gruppen <sup>15)</sup>.

Die  $m+1$  Formen der linearen Formenschaar  $S_{m+1}$

$$f, f' = A(f), f'' = A(f') = A^2(f), \dots, f^{(m)} = A^m(f) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

seien linear-unabhängig,  $f^{(m+1)}$  dagegen linear-abhängig von den Formen (4). Dann ist jedes  $f^{(m+k)} = A^{(m+k)}(f)$ , ( $k=1, 2, \dots$ ), linear-homogen durch die Formen (4) der Schaar  $S_{m+1}$  ausdrückbar:  $S_{m+1}$  bleibt also als  $(m+1)$ -dimensionaler Raum bei  $A$  invariant. Wir wollen zeigen, dass  $S_{m+1}$  auch bei jeder Operation  $X, X', X'', \dots$  von  $\mathfrak{S}_i$  invariant bleibt.

Zunächst ist, da  $f$  eine  $\mathfrak{S}_i$ -Invariante:

$$X(f) = \xi \cdot f, \quad X'(f) = \xi' \cdot f, \quad X''(f) = \xi'' \cdot f, \dots \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dann:  $X(f') = XA(f) = [XA](f) + AX(f) = X'(f) + \xi \cdot A(f)$ , da  $[XA] = X'$  wieder in  $\mathfrak{S}_i$  liegt; also wird

$$X(f') = \xi' \cdot f + \xi \cdot f' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Weiters, auf dieselbe Art:

$$X(f'') = XA(f') = [XA](f') + AX(f') = X''(f') + AX(f'),$$

also, da nach (6)  $X'(f') = [X'A](f) + \xi' \cdot A(f) = X''(f) + \xi' \cdot f' = \xi'' \cdot f' + \xi' \cdot f'$  ist:  $X(f'') = \xi'' \cdot f + \xi' \cdot f' + A(\xi' \cdot f + \xi \cdot f') = \xi'' \cdot f + 2\xi' \cdot f' + \xi \cdot f''$ .

<sup>14)</sup> H. WEYL, Mathem. Zeitschr. **24** (1925), S. 392.

<sup>15)</sup> H. WEYL, Mathem. Zeitschr. **24** (1925), S. 375.



d.h.  $\phi$  ist, wenn wir jetzt die  $f_i$  als Veränderliche betrachten, eine Invariante bezüglich der durch (11) oder (12) gegebenen infinitesimalen Transformation  $\mathfrak{A}$  des  $\Sigma'$ -Raumes. Machen wir also von dem Satze Gebrauch, dass die Invarianten bezüglich einer einzelnen infinitesimalen Transformation  $\mathfrak{A}$  eine endliche Integritätsbasis besitzen<sup>16)</sup>, so folgt die Endlichkeit für alle  $\phi$ , d. h. jedes  $\phi(f_i)$ , dass (10) befriedigt, ist ganz und rational durch  $\sigma$  Basispolynome  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6$  ausdrückbar:

$$\phi = \Psi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Nun wäre die Endlichkeit für alle  $\mathfrak{H}_{i+1}$ -Invarianten  $F(x)$  bewiesen, wenn die Basisformen  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_7$  nicht nur  $A$ -Invarianten, sondern auch  $\mathfrak{H}_i$ -Invarianten wären. Das letztere braucht aber nicht der Fall zu sein: die  $\phi_j$  sind Formen der  $\mathfrak{H}_i$ -Invarianten  $f_i$  und nicht jede Form von  $\mathfrak{H}_i$ -Invarianten ist wieder eine  $\mathfrak{H}_i$ -Invariante. Um auch diese letzte Klippe zu umsegeln, brauchen wir einige Hilfssätze, die wir im folgenden § zusammenstellen.

### § 3.

Sei  $f \neq \text{const.}$  eine Form der  $n$  Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $A(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^i x_k$  eine inf. Transf.  $A(f)$  ist wieder eine Form der  $x_i$ , vom selben Grade wie  $f$ ; ebenso  $A(A(f)) = A^2(f)$ ,  $A^3(f)$ , u.s.f. Daher gibt es zu jedem gegebenen ein  $f$  *Minimalpolynom* (mit kleinstem  $m$ )

$$\begin{aligned} D_{m+1}(A) &= A^{m+1} + d_1 A^m + d_2 A^{m-1} + \dots + d_m A + d_{m+1} = \\ &= (A - \delta_1)(A - \delta_2) \dots (A - \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{D_{m+1}(A)} \right\} \quad (14)$$

so, dass  $D_{m+1}(A)(f)$  identisch in allen  $x_i$  Null ist:

$$D_{m+1}(A)(f) \equiv 0 \{x_i\}, \quad (m \geq 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Ist  $f$  eine  $A$ -Invariante mit dem Multiplikator  $a$ , so ist  $m=0$  und  $D_{m+1}(A) = A - a$ .

Es gilt **Satz 1:** Zu jedem  $f(x)$  gibt es ein einziges *Minimalpolynom*  $D_{m+1}(A)$ . Ist  $P(A) \neq \text{const.}$  ein Polynom in  $A$  und verschwindet  $P(A)(f)$ , so ist  $P(A)$  durch  $D_{m+1}(A)$  teilbar.

Der erste Teil des Satzes ist zufolge der Minimaleigenschaft von  $m$  evident. Zum Beweise des zweiten Teiles dividieren wir  $P(A)$  durch  $D_{m+1}(A)$ :

$$P(A) = Q(A) \cdot D_{m+1}(A) + R(A)$$

wo  $R(A)$  höchstens vom  $m$ -ten Grade ist. Hieraus folgt  $R(A)(f) = 0$ , also  $R(X) = 0$  für alle  $X$ , w.z.b.w.

Es seien jetzt  $f_1, f_2, \dots, f_j$   $A$ -Invarianten, also:

$$A(f_i) = a_i f_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

<sup>16)</sup> Vgl. diese Proceedings 33, (25. Januar und 29. März 1930).



und  $\phi(f)$  ein Polynom derselben,  $D_{m+1}(A)$  das zu  $\phi$  gehörige Minimalpolynom. Dann gilt der

**Satz 2:** Die Gleichung  $D_{m+1}(X) = 0$  hat nur einfache Wurzeln.

Beweis.  $\phi$  ist ein Polynom der  $f_i$ , also

$$\phi = \sum \phi(p_1, p_2, \dots, p_j) f_1^{p_1} f_2^{p_2} \dots f_j^{p_j}, \quad (17)$$

wo  $\phi(p_1, \dots, p_j)$  den zum Potenzprodukt  $f_1^{p_1} f_2^{p_2} \dots f_j^{p_j}$  gehörigen Koeffizienten bezeichnet.

Wir haben dann nach (16):

$$\left. \begin{aligned} A(\phi) &= \sum \phi(p_1, \dots, p_j) (p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_j a_j) f_1^{p_1} \dots f_j^{p_j} \\ A^2(\phi) &= \sum \phi(p_1, \dots, p_j) (p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_j a_j)^2 f_1^{p_1} \dots f_j^{p_j} \\ &\text{u.s.f.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

und  $D_{m+1}(A)$  entsteht aus (17) und (18) durch Elimination der Produkte  $\phi(p_1, \dots, p_j) f_1^{p_1} \dots f_j^{p_j}$ . Bezeichnen wir also mit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$  die untereinander verschiedenen Werte von  $p_1 a_1 + \dots + p_j a_j$  in (18), so wird

$$D_{m+1}(A)(\phi) = \begin{vmatrix} \phi & 1 & 1 & \dots & 1 \\ A(\phi) & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{m+1} \\ A^2(\phi) & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_{m+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m+1}(\phi) & \lambda_1^{m+1} & \lambda_2^{m+1} & \dots & \lambda_{m+1}^{m+1} \end{vmatrix} = 0;$$

und hieraus

$$D_{m+1}(A) = \prod (A - \lambda_i) (\lambda_k - \lambda_i), \quad (19)$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Sind wieder die Formen  $f, f_1, f_2, \dots, f_s$   $A$ -Invarianten mit den Multiplikatoren  $a, a_1, a_2, \dots, a_s$ , dann gilt der

**Satz 3:** Ist

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_s, \quad (20)$$

so können rechter Hand alle diejenigen  $f_i$  weggelassen werden, deren Multiplikator  $a_i$  von  $a$  verschieden ist<sup>17)</sup>.

Beweis. Sei  $a_{i_1} \neq a, a_{i_2} \neq a, \dots$ . Ueben wir auf beide Seiten von (20) die Operation  $A - a$  aus, so entsteht

$$0 = f_{i_1} (a_{i_1} - a) + f_{i_2} (a_{i_2} - a) + \dots$$

und hieraus in derselben Weise  $f_{i_1} + f_{i_2} + \dots = 0$  mit  $a_{i_1} = a_{i_2} = \dots \neq a$ ;  $f_{k_1} + f_{k_2} + \dots = 0$  mit  $a_{k_1} = a_{k_2} = \dots \neq a$  und  $\neq a_{i_i}$  u.s.f. —

#### § 4.

Wir knüpfen an den Schluss des § 2 an. Jede  $\mathfrak{S}_{i+1}$ -Invariante  $F(x)$  ist nach (13) ein Polynom der  $A$ -Invarianten  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s$ , nach dem

<sup>17)</sup> H. WEYL, Mathem. Zeitschr. 23 (1925), S. 277.

Basissatz von HILBERT ist daher jede  $\mathfrak{H}_{i+1}$ -Invariante  $F(x)$  durch endlich viele feste  $\mathfrak{H}_{i+1}$ -Invarianten  $F_1, F_2, \dots, F_r$  wie folgt darstellbar:

$$F = F_1 \cdot G_1(\phi_j) + F_2 \cdot G_2(\phi_j) + \dots + F_r \cdot G_r(\phi_j) \quad (21)$$

Hier sind die  $F$  und  $F_k$   $\mathfrak{H}_{i+1}$ -Invarianten; die  $G_k(\phi_j)$  sind Polynome der  $A$ -Invarianten  $\phi_j$  und wir können nach Satz 3 des vorigen § voraussetzen, dass die  $G_k$  selbst  $A$ -Invarianten sind.

Wir trachten nun aus (21) eine Darstellung von  $F$  abzuleiten, bei der die  $G_k$  auch  $\mathfrak{H}_i$ -Invarianten sind.

Sei  $G_1 \neq \text{const.}$ ,  $X$  eine beliebige inf. Transf. aus  $\mathfrak{H}_i$ ,  $\mu$  bzw.  $\mu_i$  die zu  $X$  gehörigen Multiplikatoren von  $F, F_i$ , also

$$X(F) = \mu \cdot F, \quad X(F_i) = \mu_i \cdot F_i; \quad (22)$$

ferner sei

$$D_{m+1}(X) = (X - \delta_1)(X - \delta_2) \dots (X - \delta_{m+1}) \quad (23)$$

das zu  $G_1 = G_1(\phi_j) = G_1^*(f_v)$  gehörige Minimalpolynom, also

$$D_{m+1}(X)(G_1^*) \equiv 0.$$

$G_1^*$  ist ein Polynom der  $\mathfrak{H}_i$ -Invarianten  $f_v$ . Daher hat nach Satz 2 des vorigen § die Gleichung  $D_{m+1}(X) = 0$  nur einfache Wurzeln:

$$\delta_i \neq \delta_k \quad (24)$$

Jetzt wenden wir auf beide Seiten von (21) einen Operator

$$P(X) = X^m + p_1 X^{m-1} + \dots + p_m$$

an, der  $F$  und  $F_i$  reproduziert und bei dem  $P(X)(G_1)$  eine  $X$ -Invariante wird. Letzteres besagt, dass  $[P(X) \cdot (X - \delta)](G_1) = 0$  ist. Nach dem Satz 1 des vorigen § muss dann  $D_{m+1}(X)$  ein Teiler von  $P(X) \cdot (X - \delta)$  sein. Die Operatoren von niedrigstem Grade  $m$  bekommt man also aus (23) indem man in  $D_{m+1}(X)$  einen der Faktoren  $X - \delta_i$  weglässt. Wir setzen:

$$C_m^{(i)}(X) = (X - \delta_1) \dots (X - \delta_{i-1})(X - \delta_{i+1}) \dots (X - \delta_{m+1}) \quad (25)$$

Wenden wir dann  $C_m^{(i)}(X - \mu_i)$  auf beide Seiten von (21) an, so entsteht:

$$F \cdot C_m^{(i)}(\mu - \mu_i) = F_1 \cdot C_m^{(i)}(X)(G_1) + F_2 \cdot C_m^{(i)}(X - \mu_1 + \mu_2)(G_2) + \dots \quad (26)$$

Wäre die Zahl  $C_m^{(i)}(\mu - \mu_i)$  für alle  $i = 1, 2, \dots, m+1$  gleich Null, so müsste  $\mu - \mu_i$  wenigstens Doppelwurzel aus  $D_{m+1}(X) = 0$  sein. Wegen (24) ist also für wenigstens ein  $i$  der Faktor von  $F$  in (26) links von Null verschieden. Setzen wir dann

$$C_m^{(i)}(X)(G_1) = G'_1, \quad C_m^{(i)}(X - \mu_1 + \mu_k)(G_k) = G'_k \quad (k > 1), \quad (27)$$

so geht (26) über in

$$c \cdot F = F_1 \cdot G'_1 + F_2 \cdot G'_2 + \dots \quad (c \neq 0) \quad (28)$$

In (27) ist  $G_1$  eine  $A$ -Invariante;  $G'_1$  ist eine  $X$ -Invariante und nach

(8) ebenfalls eine  $A$ -Invariante:  $G'_1$  ist also bei  $A$  und bei  $X$  invariant. Für  $k > 1$  sind die  $G_k$  und wiederum wegen (8) auch die  $G'_k$   $A$ -Invarianten.

Was wir mit (21) und  $X$  taten um (28) zu bekommen, wiederholen wir jetzt mit (28) und  $X' \neq X$  aus  $\mathfrak{H}_i$ . Dann kommt statt (28):

$$c \cdot c' \cdot F = F_1 \cdot G''_1 + F_2 \cdot G''_2 + \dots \quad (cc' \neq 0) \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

wobei jetzt  $G''_1$  invariant ist bei  $A, X, X'$ , die  $G''_k$  ( $k > 1$ ) hingegen  $A$ -Invarianten bleiben. Das erstere folgt aus (8) und aus der für jede  $\mathfrak{H}_i$ -Invariante  $f$  geltenden Gleichung  $XX'(f) = X'X(f)$ , die auch für die Polynome  $\phi(f)$  aus  $\mathfrak{H}_i$ -Invarianten  $f$  gültig bleibt.

Die Fortsetzung dieses Verfahrens mit allen weiteren inf. Transf.  $X', X'', \dots$  von  $\mathfrak{H}_i$  liefert schliesslich

$$c_1 \cdot F = F_1 \cdot G_1^{(v)} + F_2 \cdot G_2^{(v)} + \dots \quad (c_1 \neq 0) \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

wo  $G_1^{(v)}$  jetzt eine  $\mathfrak{H}_{i+1}$ -Invariante und die  $G_k^{(v)}$  ( $k > 1$ ) wieder  $A$ -Invarianten sind.

Auf

$$c_1 \cdot F - F_1 \cdot G_1^{(v)} = F_2 \cdot G_2^{(v)} + F_3 \cdot G_3^{(v)} + \dots$$

und  $G_2^{(v)}$  die obige Ableitung wiederholt u.s.f. führt schliesslich zur Reduktion:  $F = \text{Polynom der } F_1, F_2, \dots, F_\tau$ .

## § 5.

Wir haben bei obigem Induktionsbeweis davon Gebrauch gemacht, dass die Endlichkeit aller  $\mathfrak{G}$ -Invarianten feststeht, wo

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \dots \mathfrak{G}_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

eine halbeinfache Gruppe ist.

Jetzt wollen wir zeigen, dass der für  $\mathfrak{H}_{i+1}$  gegebene Beweis auch auf halbeinfache Gruppen (31) übertragbar ist, die nicht einfach sind, wo also  $m \geq 2$  ist. Dies kann wieder mittels eines Induktionsschlusses geschehen, wenn man voraussetzt, dass die Endlichkeit für einfache Gruppen feststeht.

Es genügt  $m = 2$  zu nehmen, also  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ . Sei  $A$  eine inf. Transf. aus  $\mathfrak{G}_1$ ,  $X$  eine aus  $\mathfrak{G}_2$  und sei  $\Sigma = f_1, f_2, \dots, f_s$  ein volles System von  $\mathfrak{G}_2$ -Invarianten. Wir füllen es wieder zu einem System  $\Sigma' = \{f_v, f'_v, f''_v, \dots\}$  an, derart, dass neben  $f_v$  vom Grade  $p_v$  in den  $x_i$  alle weiteren linear-unabhängigen  $\mathfrak{G}_2$ -Invarianten  $f'_v, f''_v, \dots$  vom Grade  $p_v$  in  $\Sigma'$  vorkommen (Vgl. § 2). Dann sind alle Formen  $A(f_v)$ , wo  $A$  die Gruppe  $\mathfrak{G}_1$  durchläuft, wegen der Vertauschbarkeit von  $A$  und  $X$  ebenfalls  $\mathfrak{G}_2$ -Invarianten und wir erhalten also so wie bei (11) in § 2:

$$A(f_v) = \mathfrak{A}_v^\lambda f_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$



und für jede  $\mathfrak{G}$ -Invariante  $F(x) = \phi(f_v)$ :

$$\mathfrak{A}(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial f_v} \mathfrak{A}_v^\lambda f_v = \alpha \cdot \phi \dots \dots \dots (33)$$

Ist  $B$  auch aus  $\mathfrak{G}_1$ , so ist wegen (32)

$$AB(f_v) - BA(f_v) = [AB](f_v) = (\mathfrak{A}_v^\lambda \mathfrak{B}_\lambda^\mu - \mathfrak{B}_v^\lambda \mathfrak{A}_\lambda^\mu) f_\mu,$$

d.h.  $\mathfrak{G}_1$  und die Gruppe der inf. Transf. (32) sind isomorph. Nach Voraussetzung haben die  $\mathfrak{G}_1$ -Invarianten eine endliche Integritätsbasis  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\sigma$  und für jede  $\mathfrak{G}$ -Invariante  $F(x)$  gilt, vgl. (13):

$$F(x) = \Psi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\sigma) \dots \dots \dots (34)$$

Jetzt schliessen wir so weiter wie in § 4. An die Stelle der dortigen  $A$ -Invarianz tritt hier die  $\mathfrak{G}_1$ -Invarianz und die dortigen inf. Transf.  $X, X', X'', \dots$  erschöpfen hier die einfache Gruppe  $\mathfrak{G}_2$ .

## § 6.

Wir sprechen das in den vorigen §§ erhaltene Resultat aus als **Satz 4:**

Sei  $\mathfrak{G}$  eine kontinuierliche Gruppe linearer, homogener Transformationen der  $n$  unabhängigen Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $F(x)$  eine  $\mathfrak{G}$ -Invariante, d. h. es bestehe für jede inf. Transf.  $A$  aus  $\mathfrak{G}$  identisch in allen  $x_i$  eine Gleichung  $A(F) = \frac{\partial F}{\partial x_i} \alpha_i^k x_k = \alpha \cdot F$ . Dann bilden alle diese ganzen rationalen  $F(x)$  einen endlichen Integritätsbereich, d. h. jedes  $F$  ist ganz und rational durch endlich viele Basis-invarianten  $F_1, F_2, \dots, F_s$  darstellbar.

Wenn man von projektieven Koordinaten  $\xi_1, \dots, \xi_m$  und gegebenen Grundformen  $f(\xi), g(\xi), \dots$  dieser  $\xi_i$  ausgeht, dann erzeugt jede homogene lineare Gruppe  $\mathfrak{G}$  der  $\xi_i$  eine isomorphe lineare Gruppe im  $(N-1)$ -dimensionalen Koeffizientenraum der Grundformen. Satz 4 kann dann auch wie folgt ausgesprochen werden:

**Satz 5:** Die ganzen rationalen Invarianten von  $m$ -ären Grundformen bezüglich jeder Untergruppe der allgemeinen projektieven Gruppe von  $m$  Veränderlichen besitzen eine endliche Integritätsbasis.

Kehren wir zur Fassung von Satz 4 zurück. Ist in  $A(F) = \alpha \cdot F$  für jede inf. Transf.  $A$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$  der Multiplikator  $\alpha$  gleich Null, so ist  $F$  eine absolute  $\mathfrak{G}$ -Invariante. Hierüber gilt der

**Satz 6:** Auch die absoluten  $\mathfrak{G}$ -Invarianten bilden einen endlichen Integritätsbereich.

Beweis. Sei  $J(x)$  absolute Invariante. Der Basissatz von HILBERT gibt:

$$J = J_1 \cdot G_1 + J_2 \cdot G_2 + \dots + J_h \cdot G_h$$

wo auch  $J_1, J_2, \dots, J_h$  absolute Invarianten sind. Die  $G_i$  können wir als

Polynome der  $F_1, F_2, \dots, F_s$  auffassen, wo diese  $F_j$  eine Integritätsbasis aller Invarianten — absoluter und relativer — bilden. Machen wir dann Gebrauch von Satz 3 des § 3, so folgt

$$J = J_1 \cdot G'_1 + J_2 \cdot G'_2 + \dots + J_h \cdot G'_h$$

und die  $G'_i$  sind jetzt ebenfalls absolute Invarianten, woraus sich schliesslich Satz 6 ergibt.

So gibt es z. B. bei halbeinfachen Gruppen nur absolute Invarianten.

Dem letzten Satze kann man dann, da für absolute Invarianten  $A(J) = 0$  gilt, noch die folgende Fassung geben:

**Satz 7:** *Gegeben sei in  $n$  unabhängigen Veränderlichen ein System von linearen, homogenen, partiellen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} a_i^k x_k = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial x_i} b_i^k x_k = 0, \dots$$

*Alle ganzen und rationalen Integrale  $J$  dieses Systems bilden einen endlichen Integritätsbereich.*

---

**Physics.** — *The specific heat of solid substances at the temperatures obtainable with the aid of liquid helium. II. Measurements of the atomic heats of lead and of bismuth.* By W. H. KEESOM and J. N. VAN DEN ENDE (Comm. N<sup>o</sup>. 203d from the Physical Laboratory at Leiden).

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

§ 1. *Introduction.* The measurements of the atomic heat of lead, published by one of us and ANDREWS <sup>1)</sup> gave, in the range of temperatures below 10° K., results which did not reach the degree of accuracy one could desire. A repetition and continuation of the measurements was announced at the time. This repetition has now taken place between 2 and 17° K.

For these new measurements the following improvements in particular have been applied :

1<sup>o</sup>. The heat insulation of the calorimeter has been improved.

2<sup>o</sup>. Whereas in 1926 the same constantan wire served for heating as well as for measuring the temperature, two separate constantan wires were now used, so that the temperature change during and immediately after heating could also be observed.

3<sup>o</sup>. The thermometer wire was not inclosed in a solid mass, but was suspended freely in a helium atmosphere. We thus avoided undesirable tensions in the wire.

The results were now very regular. To the first approximation they agreed very well with a DEBIJE-curve, over the whole range investigated. The deviations, which were found in 1926, no longer occurred. A good agreement was obtained with the values, found at higher temperatures <sup>2)</sup>.

In continuation of and for comparison with these measurements of lead, measurements of bismuth were performed. This substance was chosen, because it could be expected that, at the temperatures of liquid helium, the heat capacity per cm<sup>3</sup> would be of the same order of magnitude as that of lead. Further the comparison of the results for bismuth (not superconductive at these temperatures) with those for lead would be of importance with regard to the question whether the transition of lead to a superconductive state, exerts an influence on the specific heat.

§ 2. *Method.* We employed the method of NERNST and EUCKEN, in the way usual in this laboratory since 1914 (Comm. N<sup>o</sup>. 143). As already

<sup>1)</sup> W. H. KEESOM and DON. H. ANDREWS. These Proceedings 30, 434, 1927. (Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 185a).

<sup>2)</sup> W. H. KEESOM and H. KAMERLINGH ONNES. These Proceedings 17, 894, 1914. (Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 143). F. SIMON. Zs. physik. Chem. 110, 572, 1924.



said in § 1, instead of the core used in 1926, a new one is now used, which contains two separate wires, one for measuring the temperature and one for supplying heat (see Fig. 1) <sup>1)</sup>.

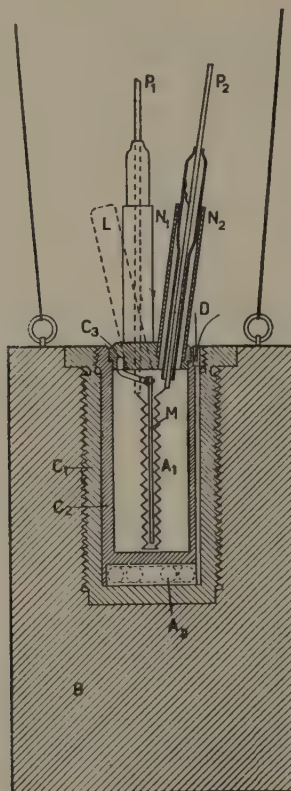


Fig. 1.

The core consists of two cylinders of copper  $C_1$  and  $C_2$ , which can be screwed in each other. The inner cylinder is closed by a copper plate  $C_3$ , soldered on it with WOOD's metal. This plate  $C_3$  carries two tubes  $N_1$  and  $N_2$  of German silver and a tube  $L$  of lead.

The thermometer wire  $A_1$  is made of annealed constantan. The resistance-temperature variation of this is more reproducible than that of constantan that has not been annealed.

The thermometer wire was wound to a spiral, and suspended freely in a helium atmosphere (comp. § 1) in the form of a loop, the two parts of which were separated by mica. The helium was admitted through the lead tube  $L$  (100 cm Hg pressure at room temperature) and the tube was then sealed off.

With this arrangement it appeared that, even at the temperatures of

<sup>1)</sup> Already in the experiments in 1914 (l.c.) two separate wires were used.

liquid helium, the exchange of heat took place more than sufficiently rapidly <sup>1)</sup>).

The leads to the thermometer were two *Pt*-wires  $P_1$  and  $P_2$ , which were sealed in small tubes of glass. These tubes were soldered in the tubes  $N_1$  and  $N_2$  of German silver, which lead to the inner part of the core. Immediately above the glass tubes a *Cu* and a *Pt* wire were fastened to each of the lead-wires, which served for measuring the resistance by means of the potentiometer.

The heating wire is wound on a copper wire and coiled up within the space below the inner cylinder of the core. The space round the wire, which is insulated with silk and celluloid, is filled up with copper amalgam. The leading-wires  $D$  to the heating wire lie in a groove along the inner cylinder, and are insulated with silk, celluloid and glass <sup>2)</sup>. To these wires *Cu* lead-wires are connected, the bifurcation of the current and tension-wires taking place outside the glass vessel, in which the core  $C$ , with the metal block  $B$  to be investigated, is suspended (see Fig. 2).

Accordingly this glass vessel has 6 tubes  $b$ , through which the measuring wires pass (4 for the thermometer and 2 for the heating wire).

The heat insulation required particular care.

As protection against heat radiation the glass vessel was silvered. To shield off radiation from above the platinum plate  $P$  was placed in the exhaust tube, and was maintained at the temperature of the bath by wires which lead to the *Cu* jacket  $H$ . This jacket also protected against heat radiation and was closed at the bottom by tin-foil  $F$ .

The heat conduction was reduced as much as possible by making the lead-wires of spirals of 60 cm length, and by suspending the block from rings of glass.

In order to avoid thermo-currents, caused by differences in temperature of the contact places of the tubes  $b$ , the lead-wires were bent downwards a little outside the glass vessel.

We met great difficulties, particularly in the experiments with the *Pb* and *Bi* block, in pumping away the last gas residues in the glass vessel at the lowest temperatures.

Finally the operation was carried out as follows :

A LEYBOLD three-stage diffusion pump (as fore-pump a "kapsel"-pump) is used, from which a very wide exhaust tube,  $\phi$  5 cm, not sharply bent, without taps and with a mercury trap without bends, leads to the cryostat. Immediately above the cryostat-top this tube becomes narrower. Yet we could not obtain a sufficient vacuum at the lowest temperatures of the bath ( $\pm 1.3^\circ$  K.). If however we then allowed the bath to attain the normal

<sup>1)</sup> This principle had already been tried with success at the temperatures of liquid hydrogen in 1917. These Proceedings 20, 1000, 1918. (Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 153a).

<sup>2)</sup> The current wires were of copper, because the resistance of copper is small, and thus there is but slight heat development. The tension wires were of platinum in order to avoid thermo-electric forces.

boiling point temperature  $4.2^{\circ}\text{K}$ ., as quickly as possible, the gas-residues could be pumped away sufficiently rapidly to maintain the block, — the

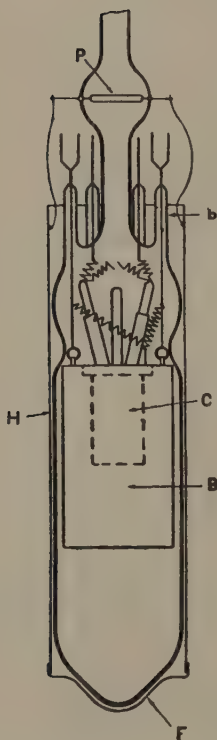


Fig. 2.

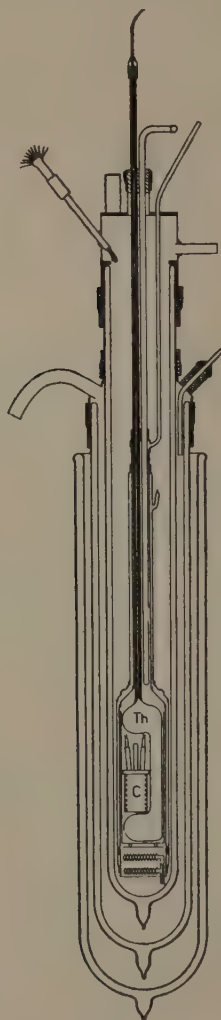


Fig. 3.

temperature of which also is increased by the conduction of these last gas-residues —, at about  $2^{\circ}\text{K}$ . From this temperature the measurements of the specific heat could begin.

Our measurements have been made in practically the same way as those of Comm. N<sup>o</sup>. 143. The resistance of the thermometer wire was measured with a DIESELHORST potentiometer and the time was accurately adjusted just as in the experiments mentioned. Only the apparatus for registration was replaced by a stopwatch.



§ 3. *The calibration of the thermometer.* The thermometer was calibrated at different hydrogen and helium temperatures. In addition we determined on each day before the measurements, some further calibration points. The temperature was derived from the vapour pressure of the liquid with the aid of the data of Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 202c<sup>1)</sup> and N<sup>o</sup>. 156b<sup>2)</sup>.

In the range between hydrogen and helium temperatures (4—14° K.) the thermometer was calibrated by direct comparison with a helium thermometer in a helium vapour cryostat.

In principle the helium vapour cryostat was the same as that used formerly by KAMERLINGH ONNES and TUYN<sup>3)</sup>. In the cryostat was a gas-thermometer *Th* in the form of a dumbbell (see Fig. 3).

The core was suspended between the two wide parts, so that we may assume that the core has the mean temperature of the gasthermometer. Besides this apparatus a constantan wire for comparison and a gas-thermometer for regulation were placed in the cryostat. Along the capillary of the gasthermometer was an auxiliary capillary.

The pressure of the helium in the thermometer was measured with a mercury manometer. The corrections for the pressure were determined with the formula of Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 156a p. 18<sup>4)</sup>. The volumes  $V_0$  and  $v_c$  were calibrated by accurate weighing of mercury, the volumes  $v_s$  were partly calculated and partly estimated.  $f(t)$  was estimated by extrapolating from the formula given in Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 188a note p. 6<sup>5)</sup> for the expansion coefficient of Jena glass 16 III.  $\frac{\beta}{V_0}$  was taken in correspondence with the value in Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 156a.

The corrections to the absolute scale were calculated according to the formula (139) of Leiden Comm. Suppl. N<sup>o</sup>. 23<sup>6)</sup>. The ice point pressure was calculated from the pressures at the boiling points of  $H_2$  and  $He$ , which gave values agreeing very well. We used  $B_0 = 0.000521$  and  $B_{100} = 0.000503$  as averages of the values, obtained at Leiden and at Berlin<sup>7)</sup>.

In the range most important to us (4—14° K.), we had no experimental

<sup>1)</sup> W. H. KEESOM, S. WEBER and G. SCHMIDT. These Proceedings 32, 1314, 1929.

<sup>2)</sup> J. PALACIOS and H. KAMERLINGH ONNES. Arch. Néerl. III A, 6, 31, 1923.

<sup>3)</sup> H. KAMERLINGH ONNES and W. TUYN. These Proceedings 25, 451, 1923. (Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 160b), W. TUYN. Thesis Leiden 1924.

<sup>4)</sup> P. G. CATH and H. KAMERLINGH ONNES. Arch. Néerl. III A, 6, 1, 1923.

<sup>5)</sup> These Proceedings 30: 970, 1927. These values agree very well with the values for the low temperatures, published not long ago by KEESOM and BIJL, see these Proceedings 32, 1164, 1929. (Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 203a).

<sup>6)</sup> H. KAMERLINGH ONNES and W. H. KEESOM. Die Zustandsgleichung, Math. Enz. V. 10, 1912.

<sup>7)</sup> H. KAMERLINGH ONNES. These Proceedings 10, 445, 1907. (Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 102a). L. HOLBORN and H. SCHULTZE. Ann. d. Phys. 47, 1089, 1915. J. D. A. BOKS and H. KAMERLINGH ONNES. Reports and Comm. 1st Comm. Int. Inst. of Refrigeration London 1924 (Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 170a).

$B$ -values at our disposal. However the  $B_A$ -values, determined by KEESOM and NIJHOFF<sup>1)</sup> appear to change linearly with the temperature in the temperature range 130—14° K. By extrapolation a fairly good agreement with the values at helium temperatures obtained by BOKS and KAMERLINGH ONNES<sup>2)</sup> is found. If we accept this linear extrapolation we can calculate the  $B$ -values from the formulae :

$$B = \frac{B_A}{A_A} \text{ and } A_A = A_{A_0}(1 + \alpha_A t) \text{ with } A_{A_0} = 0,99947^3) \text{ and } \alpha_A = 0,00366174^4).$$

The corrections to the absolute scale vary in this case also linearly with the temperature ; they are for the ice point pressure (8.56 atm.), used by us, 0.33<sub>55</sub>° and 0.28<sub>65</sub>° at the temperatures —270.00 and —251.00° C. <sup>5)</sup>

In the range between 4.2 and 8.8° K. we worked with success with the vapour cryostat. Between 10 and 14.5° K. we calibrated in solid hydrogen.

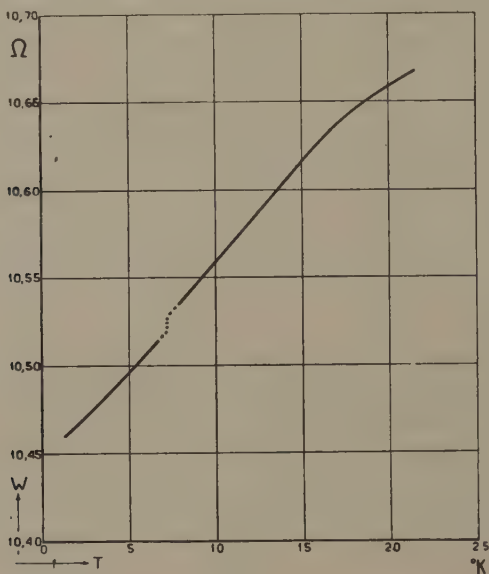


Fig. 4.

<sup>1)</sup> These Proceedings 31, 404 and 408, 1927. (Leiden Comm. Nos. 188b and c). G. P. NIJHOFF. Thesis Leiden 1928.

<sup>2)</sup> These Proceedings 13, 1093, 1911 and Rep. and Comm. 1st Int. Inst. of Refr. London 1924 (Leiden Comm. Nos. 119a and 170b).

<sup>3)</sup> J. D. A. BOKS and H. KAMERLINGH ONNES. Rep. and Comm. 1st Int. Inst. of Refr. London 1924 (Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 170a). L. HOLBORN and J. OTTO, Zs. f. Phys. 30, 320, 1924 and 38, 359, 1926.

<sup>4)</sup> W. H. KEESOM and H. KAMERLINGH ONNES. Rep. and Comm. 1st Int. Inst. of Refr. London 1924 (Leiden Comm. Suppl. N<sup>o</sup>. 51a).

<sup>5)</sup> As a control we calculated the fundamental pressure coefficient of our gasthermometer from the pressures measured at the boiling points of hydrogen and of helium, and the corrections mentioned. The result agreed with the pressure coefficient calculated with the aid of  $B_0$  and  $B_{100}$ .

The temperature could be maintained constant by regulating the vapour pressure.

In this way, we obtained, for the whole temperature range a resistance-temperature curve (see Fig. 4) for the measuring wire. Some uncertainty remains only at 7° K. It seems that here the resistance suddenly or within a small temperature region becomes somewhat smaller in going to lower temperatures, due probably to the presence of a small quantity of a super-conductor (lead). We did not consider the results of experiments which reached into this uncertain region.

§ 4. *The results.* The heat capacities found for the core are represented in Fig. 5. Above 5° K. the errors in the heat capacity have but little

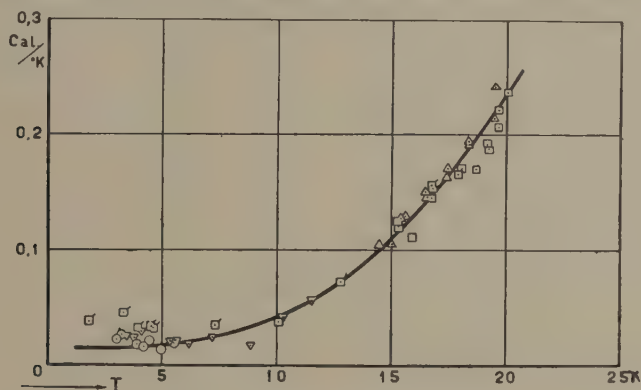


Fig. 5. Heat capacities of the core.

□ Febr. 27th 1928.    ◻ May 24th 1928.    ○ Nov. 23rd 1928.  
 △ Nov. 27th 1928.    ▽ Nov. 30th 1928.

influence on the values of the atomic heats of *Pb* and *Bi*. They are less favourable at the temperatures < 5° K. ; here the inaccuracies in the values of the heat capacity are much greater, which can give an error of  $\pm 10\%$  in the atomic heats, that attain a very small value in this range. For the calculation the values, given by the curve in Fig. 5 we used.

For the investigation of the *specific heat of lead* the same block was used as in the previous investigations (weight 699.397 gram or 3.375<sub>5</sub> gram-atoms). The results for lead are given in table I and represented in Fig. 6. The curve corresponds with  $\theta = 88$ .

As a first approximation our results in the helium range and in the range between *He* and *H<sub>2</sub>* temperatures agree with a DEBIJE curve. This is a deviation from the results of Leiden Comm. N°. 185a (cf. § 1).

Agreement with one single DEBIJE curve could not however be obtained. At lower temperatures the atomic heat corresponds to smaller values of  $\theta$ . At temperatures < 7° K. the  $\theta$ 's calculated show rather large fluctuations. Yet they seem to change linearly with the temperature in the whole tem-

perature range ( $7^{\circ}\text{K. } \theta = 83, 16^{\circ}\text{K. } \theta = 86$ ). This agrees with the results of KEESOM and KAMERLINGH ONNES, who also found a change of the  $\theta$ -values <sup>1)</sup>).

Our measurements show clearly that the course of the specific heat of lead does not change when it becomes super-conductive. The occurrence of

TABLE I.

Atomic Heat of Lead.									
Nº.	Current m.Amp.	Time sec.	Pot. diff. V.	Temp. °K.	Change of Temp. °K.	Total ht. cap. cal./°K.	Ht. cap. core cal./°K.	At. ht. lead cal./°K.	$\theta$
June 5th 1928 (in liquid helium)									
lb	25.2	78	2.305	9.96	0.45	2.4063	0.0401	0.701	84.8
c	30.02	76	2.784	12.15	0.39	3.8925	0.0632	1.13	85.3
d	30.00	78	2.790	14.84	0.29	5.3805	0.1068	1.56	89.6
e	30.00	76	2.788	15.73	0.24	6.3302	0.1242	1.84	87.3
June 12th 1928 (in liquid helium)									
Ia	15.5	64	1.400	4.77	0.95	0.3494	0.0159	0.0988	79.7
b	15.5	80	1.400	5.58	0.78	0.5319	0.0178	0.152	80.9
IIa	15.4	36	1.396	2.20	0.89	0.2078	0.0137	0.0575	44.2
b	15.4	48	1.398	3.55	1.65	0.1497	0.0140	0.0402	80.6
c	15.3	48	1.398	4.49	0.97	0.2530	0.0153	0.0704	84.4
July 3rd 1928 (in liquid helium)									
Ia	15.1	44	1.378	3.56	1.65	0.1326	0.0140	0.0351	84.4
b	15.2	50	1.380	4.61	0.79	0.3173	0.0157	0.0894	81.1
IIa	11.4	42	1.038	2.98	1.18	0.1007	0.0139	0.0287	75.4
b	11.4	48	1.038	4.06	0.74	0.1834	0.0148	0.0500	85.3
c	11.4	72	1.039	4.73	0.67	0.3042	0.0159	0.0854	83.2
d	14.9	78	1.344	5.48	0.80	0.4666	0.0177	0.133	86.0
e	14.9	74	1.348	6.16	0.55	0.6459	0.0194	0.186	83.5
h	20.0	62	1.812	7.61	0.43	1.2488	0.0250	0.363	82.2
i	21.9	72	1.990	8.46	0.47	1.5956	0.0297	0.464	83.8
j	21.9	76	1.998	9.44	0.37	2.1481	0.0361	0.626	83.9

<sup>1)</sup> Comp. these Proceedings 17, 894, 1914. Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 143. Fig. 11.



an effect at the transition-point does not seem to us probable; since however, the thermometer wire is uncertain just here, we could not be quite certain at this point. Further measurements must be made to decide this.

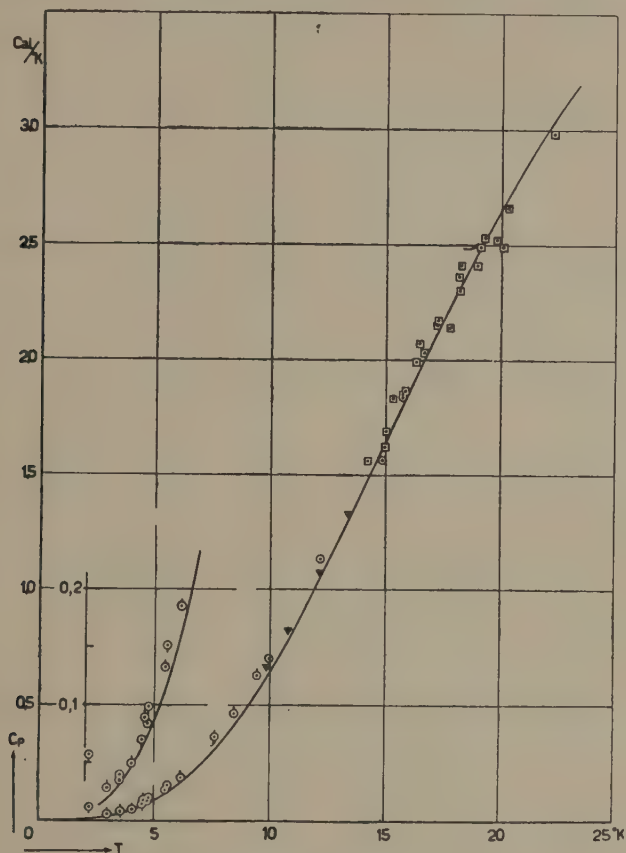


Fig. 6. Atomic heats of Lead.

⊙ June 5th 1928.

⊖ June 12th 1928.

⊖ July 3rd 1928.

□ W. H. KEESOM and H. KAMERLINGH ONNES. Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 143 (1914).

▽ F. SIMON. Zs. f. phys. Chem. 110, 572, 1924.

For the investigation of the *specific heat of bismuth*, bismuth supplied by Kahlbaum and Co (weight 648.687 gram or  $3.103_8$  gram-atoms) was used. The results for bismuth are given in table II and represented in Fig. 7. The curve corresponds with  $\theta = 96$ .

To a first approximation the results again agree with a DEBIJE curve, though here also deviations occur. There appears to be a minimum for  $\theta = 92$  at about  $9^\circ$  K.; from here the  $\theta$ -values increase continuously till

TABLE II.

Atomic Heat of Bismuth.									
No.	Current m.Amp.	Time sec.	Pot. diff. V.	Temp. °K.	Change of Temp. °K.	Total ht. cap. cal./°K.	Ht. cap. core cal./°K.	At. ht. bismuth cal./°K.	$\theta$
October 12th 1928 (in liquid hydrogen)									
Ia	28.06	80	2.612	14.26	0.38	3.6878	0.0961	1.16	99.1
b	28.12	80	2.618	14.72	0.35	4.0217	0.1047	1.26	98.6
c	28.12	108	2.618	15.27	0.41	4.6347	0.1148	1.46	95.4
d	27.60	148	2.572	16.41	0.50	5.0219	0.1391	1.57	98.8
e	27.58	148	2.570	16.86	0.48	5.2233	0.1495	1.60	100.5
f	27.64	150	2.580	17.11	0.46	5.5576	0.1553	1.74	97.9
g	27.62	160	2.578	17.76	0.45	6.0508	0.1719	1.89	97.0
November 1st 1928 (in liquid helium)									
Ia	15.38	42	1.420	5.53	0.75	0.2923	0.0178	0.0884	96.2
b	15.38	50	1.420	6.09	0.63	0.4143	0.0191	0.127	93.8
c	15.30	52	1.418	6.61	0.58	0.4649	0.0210	0.143	97.8
g	17.42	64	1.610	7.81	0.48	0.8937	0.0261	0.280	92.2
h	17.42	62	1.608	8.16	0.39	1.0643	0.0279	0.334	90.7
i	25.20	66	2.338	10.27	0.50	1.8587	0.0429	0.585	93.7
j	25.14	60	2.328	10.70	0.42	1.9982	0.0470	0.629	94.9
k	25.22	66	2.342	12.35	0.33	2.8233	0.0660	0.888	95.8
l	25.18	78	2.340	14.31	0.29	3.7876	0.0971	1.19	98.3
November 9th 1928 (in liquid helium)									
Ia	7.02	40	0.648	3.52	0.74	0.0588	0.0140	0.0144	112.0
b	7.03	44	0.650	4.17	0.42	0.1144	0.0150	0.0320	101.7
c	7.04	44	0.650	4.52	0.30	0.1604	0.0455	0.0467	97.2
d	8.86	46	0.820	4.88	0.43	0.1858	0.0161	0.0547	99.6
IIa	8.86	22	0.818	2.77	0.74	0.0515	0.0138	0.0122	93.5
b	8.83	34	0.818	3.64	0.73	0.0804	0.0141	0.0214	101.6
c	8.84	44	0.818	4.38	0.60	0.1267	0.0152	0.0359	102.9
e	10.84	62	1.004	5.35	0.61	0.2644	0.0172	0.0796	96.3
f	13.22	66	1.220	5.84	0.70	0.3634	0.0184	0.111	93.4
g	13.24	62	1.222	6.45	0.51	0.4701	0.0204	0.145	95.3
k	29.26	62	2.716	10.33	0.59	1.9959	0.0434	0.629	91.7
l	29.26	98	2.720	12.33	0.64	2.9126	0.0657	0.917	94.6
m	29.22	120	2.720	14.49	0.45	5.0624	0.1001	1.60	86.7

TABLE II (Continued).

November 13 <sup>th</sup> 1928 (in liquid hydrogen)									
Ia	29.12	74	2.710	14.04	0.44	3.1720	0.0921	0.992	104.0
c	29.12	118	2.710	15.14	0.49	4.5420	0.1122	1.43	95.5
d	29.14	120	2.712	15.72	0.47	4.8224	0.1242	1.51	96.4
e	29.12	118	2.716	16.14	0.46	4.8489	0.1331	1.52	98.8
f	29.16	126	2.720	16.59	0.46	5.1924	0.1433	1.63	98.0
g	29.00	144	2.706	17.07	0.45	6.0017	0.1548	1.88	93.5
h	29.10	138	2.718	17.65	0.44	5.9288	0.1690	1.86	97.4
i	29.06	136	2.718	18.10	0.45	5.7052	0.1810	1.78	102.3
j	29.08	152	2.720	18.57	0.50	5.7469	0.1942	1.79	104.7
k	29.02	184	2.718	19.21	0.56	6.1940	0.2121	1.93	103.7

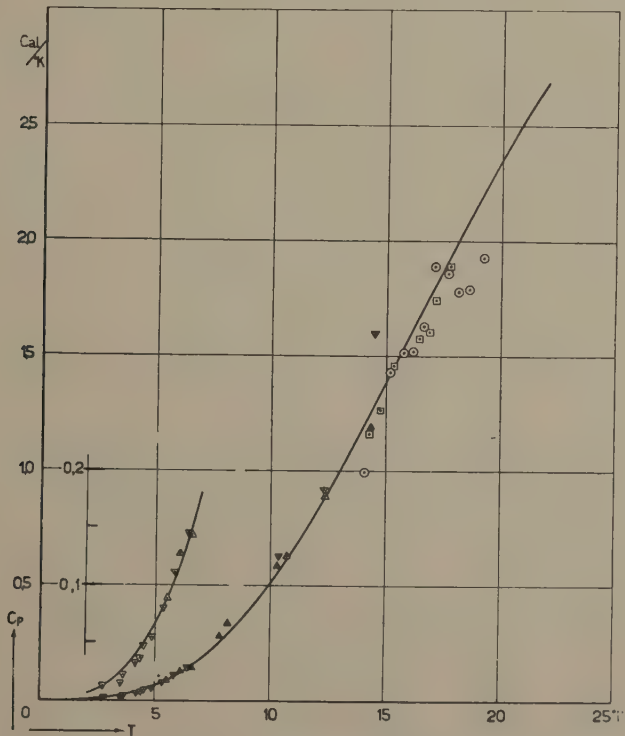


Fig. 7. Atomic heats of Bismuth.

□ Oct. 12th 1928.    △ Nov. 1st 1928.    ▽ Nov. 9th 1928    ○ Nov. 13th 1928.

$\theta = 103$  at  $3^\circ \text{K}$ . and  $\theta = 104$  at  $20^\circ \text{K}$ . This is a similar change to that found for copper in 1914<sup>1)</sup>).

The value for bismuth, calculated by DEBIJE<sup>2)</sup> from elasticity measurements was  $\theta = 111$ .

§ 5. *Adjusted values of the atomic heats.* From a graph in which the  $\theta$ -values (§ 4) were given, smoothed values for it were read off at some temperatures, and from these adjusted atomic heats were calculated. Table III gives the result.

TABLE III.

Atomic Heat of Lead and Bismuth.				
Temperature	Lead		Bismuth	
$^\circ \text{K}$	$\theta$	At. ht.	$\theta$	At. ht.
3	81.4	0.0233	103.3	0.0114
4	81.8	0.0545	101.0	0.0286
6	82.5	0.178	96.1	0.112
8	83.3	0.406	92.4	0.300
10	84.2	0.726	92.3	0.567
12	85.1	1.09	94.3	0.860
14	86.0	1.53	96.6	1.17
16	86.9	1.91	99.0	1.49
18	87.8	2.25	101.5	1.78
20	88.7	2.62	104.1	2.05

It is a pleasure to record our thanks to all those who have helped us in this investigation, particularly to Mr. G. J. FLIM, chief of the technical staff, Mr. O. KESSELRING, chief-glass-blower, and Mr. A. OUWERKERK, technician of the Leiden Laboratory, for their valuable help in the construction of the apparatus. Also to Mr. J. A. KOK, nat. phil. cand., for the many calculations he has made for us.

<sup>1)</sup> Comp. these Proceedings 18, 484, 1915. Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 147a. Fig. 2.

<sup>2)</sup> P. DEBIJE. Ann. d. Phys. 39, 817, 1912.



**Physics.** — *On the Crystal structure of Neon.* By J. DE SMEDT, W. H. KEESOM and H. H. MOOY. (Communication N<sup>o</sup>. 203e from the Physical Laboratory at Leiden).

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

§ 1. *Method.* The method for making an *X*-ray analysis of solidified gases described in Suppl. N<sup>o</sup>. 53a <sup>1)</sup>, is applicable in an unchanged form, only for those temperatures where the vapour pressure of the solidified gas is so small, that the heat transfer through the vapour does no harm. Neon has to be cooled therefore, to liquid helium temperatures.

In adapting the method of Suppl. N<sup>o</sup>. 53a to the use of liquid helium, we modified the cryostat used by VEGARD and KEESOM <sup>2)</sup> in their research on the luminescence of solid hydrogen, so as to be suitable for this purpose.

We shall only discuss here the essential alterations.

To the lower part of the copper rod *r* (Fig. 1*b*), the end of which dips into the liquid helium reservoir, a small copper rod *q* of 1.5 cm length was soldered, on which the crystal layer is to be deposited. This rod has a form, suitable for preventing as much as possible, scattered radiation and DEBIJE—SCHERRER lines of copper, from becoming too strong. A perpendicular section of it is given in Fig. 1*b* on an enlarged scale.

In the first experiments this rod was protected only by a screen (6 of Fig. 1*b* Comm. N<sup>o</sup>. 186), which had the temperature of liquid hydrogen. We found it possible to solidify on the rod a layer of neon of sufficient thickness, but in consequence of the difficulties we encountered, when experimenting on solid hydrogen, the screening system drawn in Fig. 1*b* was adopted.

The inner screen (*Sc*<sub>i</sub>) has a temperature lying between that of liquid hydrogen and that of liquid helium; the outer screen (*Sc*<sub>e</sub>), which is hollow, has the temperature of liquid hydrogen.

By means of the tap *K*<sub>2</sub> and capillary *C* (Fig. 1*a*) we could cause the gas that was admitted into the camera very slowly, to pass through this outer screen before it could crystallize on the copper rod.

This arrangement was made to forecool the admitted gas if this should appear to be necessary. As this proved not to be the case for neon, we admitted it directly into the camera.

The opening in the screen for the diffracted rays measures slightly more:

<sup>1)</sup> J. DE SMEDT and W. H. KEESOM. These Proceedings 27, 839, 1924.

<sup>2)</sup> These Proceedings 30, 514, 27. Comm. Leiden N<sup>o</sup>. 186.

than  $180^\circ$  (cf. Fig. 1b, section through a b), so that reflections with glancing angles varying from 8—45 degrees could be registered.

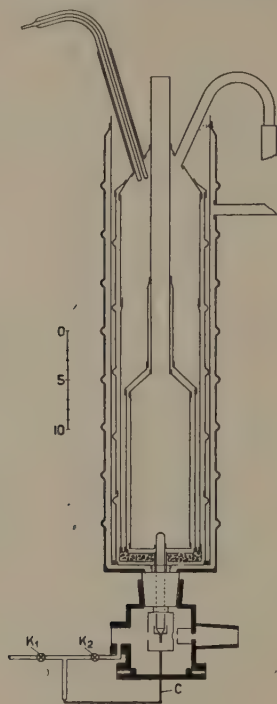


Fig. 1a.

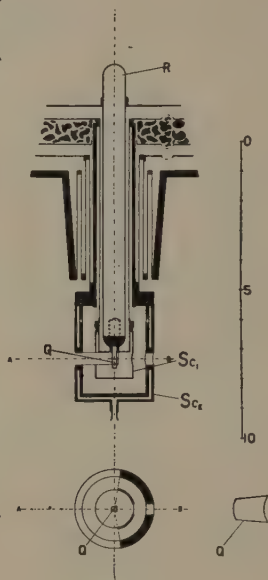


Fig. 1b.

§ 2. *Calibration of the camera.* For the determination of the spacings we made use of an interpolation method <sup>1)</sup>, which is not only convenient, but in our case necessary considering the relatively large (e.g. 2.1 mm) and unusual form of the radiated sample.

The camera was calibrated by an exposure of  $\text{CO}_2$  at the temperature of liquid air <sup>2)</sup>. Of course we made a long exposure of the copper rod alone.

The X-ray source was a PHILIPS BOUWERS tube with copper anticathode,  $\text{CuK}_\beta$  radiation being eliminated by a Ni-filter of 0.014 mm thickness.

§ 3. *Result.* We obtained a very clear DEBIJE—SCHERRER diagram of solid neon with exposure 3 hours, voltage 26 kV, current 6 mA. Only four sharp and intense lines originating from neon could be observed.

The spacings correlative with these lines, correspond with a face-centred cubic lattice, the lattice constant being 4.52 A.U. This is shown by the following table.

<sup>1)</sup> J. DE SMEDT, W. H. KEESOM et H. H. MOOY. These Proceedings 32, 745, 1929. Comm. N<sup>o</sup>. 202a.

<sup>2)</sup> Comp. Suppl. N<sup>o</sup>. 53a l.c.

TABLE I.

Intensity estimated	Intensity calculated	Spacings observed	Spacings calculated	<i>h k l</i>
10	10	2.59	2.61	111
4	5.1	2.26	2.26	200
7	4.7	1.60	1.60	220
8	6.5	1.35 <sup>5</sup>	1.36	311

A calculation of the density gives  $1.44^3$  at a temperature which we estimate to be slightly higher than the boiling point of helium. The value of the density mentioned, agrees with a rough estimate obtained by considering the densities of liquid neon measured by KAMERLINGH ONNES and CROMMELIN <sup>1)</sup>).

The diameter of the neon atom calculated from viscosity data is 2.36 A.U. <sup>2)</sup>, the crystal structure gives for the distance of the centers of the nearest neighbours 3.20 A.U., Ratio : 1.35. The analogous value in the case of argon is <sup>2)</sup>  $3.84/2.97 = 1.29$ .

<sup>1)</sup> These Proceedings 18, 515, 1915.

<sup>2)</sup> Handb. d. Physik 22, Art. HERZFELD, p. 436.

**Physics.** — *On the supra-conductivity of alloys.* By W. J. DE HAAS, EDM. V. AUBEL and J. VOOGD. (Comm. N<sup>o</sup>. 208a from the Physical Laboratory Leiden).

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

### *Introduction.*

In former researches we investigated the phenomena of supraconductivity of alloys <sup>1)</sup>).

### *1<sup>o</sup>. Combinations.*

We found that in the case of a supraconductive metal with a non supraconductive one totally different phenomena can occur from the case of pure supraconductors.

The combinations  $Cu_3Sn$  and  $Cu_4Sn$  e.g. do not become supraconductive at the lowest temperatures.

Totally different phenomena were found with the combinations  $Bi_5Tl_3$  and  $Sb_2Tl_7$ .

Though pure thallium becomes supraconductive at  $2.37^\circ K.$ , the combinations mentioned are already supraconductors at the boiling point of helium ( $4.22^\circ K.$ ).

### *2<sup>o</sup>. Solid solutions.*

The supraconductivity was also investigated for solid solutions of a non supraconducting metal in a supraconducting one.

For these solid solutions the transition point was proved in some cases to be higher, in other cases to be lower than for the pure supraconductor.

The change in the transition point is not more than  $0.1^\circ$  as a rule.

Examples of a rise of the transition point are solutions of bismuth in tin and of cadmium in thallium.

A lowering of the transition point was found for solutions of zinc in tin, of cadmium in tin and of gold in thallium.

We have continued these investigations and will communicate here the results for the combinations  $AuSn$ ,  $Hg_5Tl_2$ ,  $PbTl_2$  and of an alloy of silver with thallium. The resistances were measured in the usual way in liquid hydrogen and in liquid helium. For the calculation of the helium temperatures the new vapour tension curves were used <sup>2)</sup>).

<sup>1)</sup> EDM. VAN AUBEL, W. J. DE HAAS and J. VOOGD. Comm. Leiden 193c. Proc. R. Acad. Amsterdam Vol. 32, 1929, p. 218.

W. J. DE HAAS, EDM. V. AUBEL and J. VOOGD. Comm. Leiden 197a, 197b. Proc. R. Acad. Amsterdam. Vol. 32, 1929, p. 226 and 715.

<sup>2)</sup> Comm. N<sup>o</sup>. 202b, Leiden, Proc. Vol. 32, 1929, p. 864.



Though it is no longer necessary we still give the vapour tension of the liquid helium to facilitate the comparison with former results.

All alloys were made by one of us (V. AUBEL) in Gent with exception of the combination  $Hg_5Tl_2$ .

The measurements in liquid hydrogen were made three months after those in liquid helium. The residual resistance of  $AuSn$  and of  $PbTl_2$  proved to have changed a little in the meantime, which was deduced from the fact that the resistance curve in liquid hydrogen is not a continuation of that in liquid helium.

### § 1. $AuSn$ .

The investigated rod was made of gold from HERAEUS and of tin "Kahlbaum". It contains 62.4 % gold.

In table 1 the results of the resistance measurements have been given.

Besides the measured resistance we also give the value of this resistance divided by that of the resistance at  $0^\circ C.$  ( $R/R_0$ ).

The resistance in liquid helium is seen to remain constant, so that the supraconductivity of the tin evidently is quite disturbed. The combination  $AuSn$  thus behaves exactly as the combinations  $Cu_3Sn$  and  $Cu_4Sn$ .

TABLE 1.  $Au Sn$ .

$T$	$P_{helium}$	$R$	$R/R_{0.7}$
$20.40$		0.000089	0.0487
18.05		80	0.0437
16.13		74	0.0404
14.16		68	0.0372
4.21	750 m.m.	72	0.0393
3.79	499	72	0.0393
3.59	401	72	0.0393
2.92	164	72	0.0393
2.48	74	73	0.0399
1.43	3.1	73	0.0399

### § 3. $Hg_5Tl_2$ .

For this combination we made in Leiden a rod of mercury, twice distilled in vacuum and of thallium from Kahlbaum.

The liquid mixture, containing 28.6 % thallium was pressed in a glass tube, to the extremities of which two platinum wires were sealed which were used as contacts for the resistance measurements.

The resistance was measured in liquid helium only.

This combination proves to become supraconductive, the transition point

lying a little lower than that of pure mercury and considerably higher than that of pure thallium (table 2).

TABLE 2.  $Hg_5 Tl_2$ .

$T$	$p_{helium}$	$R$
4.22	760 m.m.	0.01452
4.10	673	0.01451
4.05	648	0.01450
4.01	622	0.01449
3.97	599	0.01446
3.88	548	0.01229
3.84	524	0.00071
3.82	514	0

#### § 4. $PbTl_2$ .

The rod investigated consisted of lead "Kahlbaum" and of thallium from Kahlbaum.

It contains 33.5 % lead.

The results of the resistance measurements are given in table 3.

TABLE 3.  $Pb Tl_2$ .

$T$	$p_{helium}$	$R$	$R/R_0$
20.40		0.001007	0.575
18.05		1002	0.572
16.13		996	0.569
14.16		992	0.567
4.24	778 m.m.	935	0.534
4.20	747	931	0.532
4.14	699	931	0.532
4.11	679	930	0.531
4.10	675		
4.09	670	618	0.353
4.09	667	116	0.066 <sup>2</sup>
4.05	647	0	

The transition point of the combination  $PbTl_2$  is seen to lie between the transition points of pure lead and of pure thallium.

### § 5. $AgTl$ <sup>1)</sup>.

Of this combination we investigated a rod, consisting of silver from HERAEUS and of thallium from Kahlbaum. It contains about 3 % silver. According to the melting point diagram the rod must contain thallium with some silver and a solid solution of thallium in silver. By measurement of the resistance we can find the transition point of the thallium with silver which forms a supraconducting short circuit in the rod at the transition point. The results of the measurements are found in table 4.

While pure thallium becomes supraconductive at  $2.37^\circ K.$ , thallium containing silver becomes a supraconductor at  $2.67^\circ K.$

TABLE 4.  $Ag Tl$ .

$T$	$P_{helium}$	$R$	$R/R_0$
$20.40$		$0.000155$	$0.187^3$
$18.05$		$151$	$0.183$
$16.13$		$146$	$0.176$
$14.16$		$142$	$0.172$
$4.21$	$750 \text{ m.m.}$	$133$	$0.161$
$3.77$	$499$	$132$	$0.160$
$3.61$	$401$	$132$	$0.160$
$2.92$	$164$	$131$	$0.158$
$2.77$	$129$	$132$	$0.160$
$2.73$	$119$	$131$	$0.158$
$2.71$	$115$	$132$	$0.160$
$2.70$	$113$	$132$	$0.160$
$2.68$	$108$	$113$	$0.137$
$2.65$	$104$	$0$	$0$
$R_0 = 0.000827^3$			

<sup>1)</sup> PETRENKO. Z.S. f. anorg. Chemie **50**, 133, 1906.

**Physics.** — *The influence of magnetic fields on superconductors.* By W. J. DE HAAS and J. VOOGD. (Comm. N<sup>o</sup>. 208b from the Physical Laboratory at Leiden.)

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

§ 1. In a preceding paper we discussed the magnetic disturbance of the superconductivity of some alloys <sup>1)</sup>).

For all investigated alloys the magnetic threshold value was found to rise more rapidly with lowering of the temperature than for pure metals.

In order to investigate whether this is a general property of superconductive alloys, an extension of the data was very desirable.

The investigation namely had been made with the combination  $Bi_5Tl_3$  only and quantitatively with the combination  $Sb_2Tl_7$  and for the solid solutions of cadmium in tin and of bismuth in tin.

So we now wished to determine for other alloys also the magnetic threshold value at different temperatures. This question is of importance not only for the special problem of superconductivity, but also for an other purpose.

Nowadays we know, that with a solenoid of superconductive material magnetic fields can be generated without development of heat, if only the excited magnetic fields are below the threshold value of the superconductor.

If therefore this magnetic threshold value lies very high, the generated magnetic fields can also reach a very high value.

In connexion with the high transition point of lead we planned to make an investigation of lead alloys. In this paper we will give the results of the investigation of the combination  $PbTl_2$  and  $Sb_2Sn_3$ , of alloys lead-bismuth, of an alloy lead-tin-bismuth and of an alloy lead-tin-bismuth-cadmium.

## § 2. *The combination $PbTl_2$ .*

For this research we used the rod, of which we had already determined the transition point (in collaboration with Prof. v. AUBEL) <sup>1)</sup>).

The magnetic field was generated by a solenoid placed round the helium cryostat and parallel with the axis of the rod. This solenoid cannot give fields above 1000 gauss.

As the magnetic threshold value rapidly increased with fall of temperature, the measurements had to be made immediately below the transition point.

The results are given in table 1 and in fig. 1.

It is striking, that the magnetic field interval, in which the resistance

<sup>1)</sup> Comm. Leiden N<sup>o</sup>. 208a.

These Proc. Vol. 33, 1930, p. 258.



comes back is much greater than in the case of a longitudinal disturbance of the supraconductivity of pure metals.

TABLE 1.  $Pb\ Tl_2$ .

$H$	$R$	$T$	$P_{helium}$ in m.m.
21.4 gauss	0 $\Omega$	4.05	647
33.6	0.000015		
35.5	0.000064		
37.5	0.000136		
41.3	0.000397		
45.8	0.000682		
55.6	0.000917		
101.9	0.000917		
42.8	0.000464		
0	0		
132.5	0.000106	3.97	597
135.0	0.000242		
139.1	0.000455		
143.4	0.000659		
147.7	0.000815		
151.9	0.000882		
171.2	0.000926		
214.0	0.000926		
321.0	0.000926		
139.1	0.000478		
0	0		
139.1	0.000478		
214.0	0	3.90	557
237.5	0.000282		
241.8	0.000464		
246.1	0.000646		
252.5	0.000822		
258.9	0.000901		
267.5	0.000915		
278.2	0.000924		
321.0	0.000926		
255.5	0.000880		

Further on we shall see, that this is also the case with the combination  $Sb_2Sn_3$ .

For both combinations the hysteresis phenomenon could not be proved.

From the above we expect that with respect to the form of the mag-

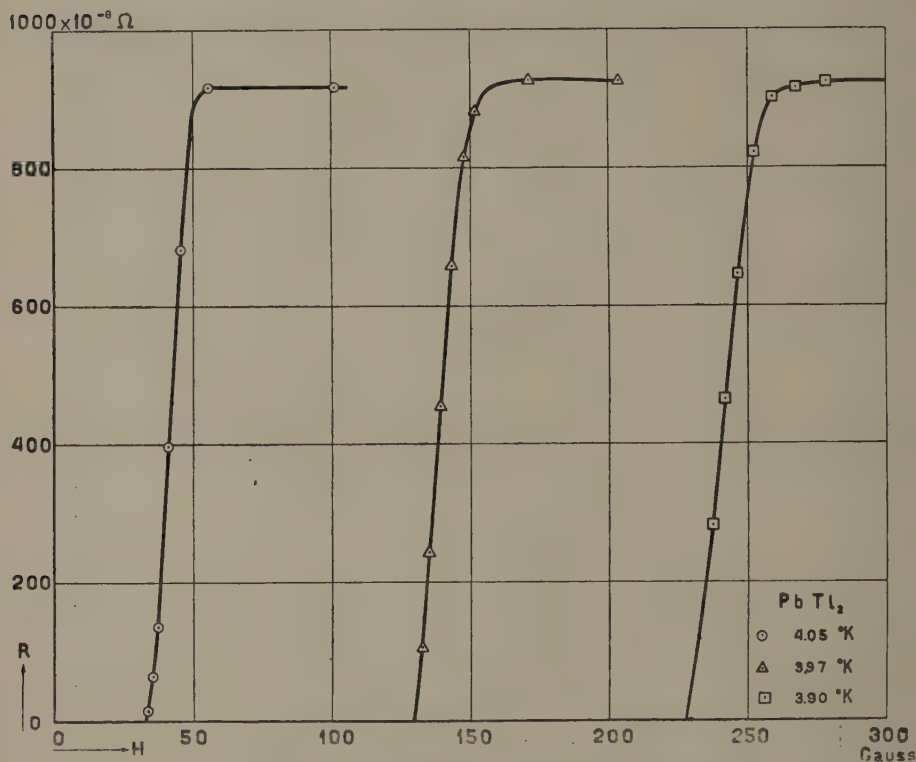


Fig. 1.

netic transition curve also characteristic differences exist between alloys and pure metals.

It may however be that inhomogeneities in the investigated rods are the cause of these differences. We intend to investigate these problems with more refined means.

For the different temperatures we give in table 2 the value of the mag-

TABLE 2.  $PbTl_2$ .

$T$	$H(W^{1/2})$
4.05 °K.	42 gauss
3.97	139
3.90	242

netic field for which the resistance is reduced to half of its normal value ( $H_{(w\ 1/2)}$ ).

§ 3. *The combination  $Sb_2Sn_3$ .*

We used the rod, the transition point of which had been determined by Prof. v. AUBEL <sup>1)</sup>. In table 3 and in fig. 2 the magnetic disturbance for different temperatures has been given, while the value  $H_{w\ 1/2}$  for these temperatures is to be found in table 4.

The difference with the pure metals, though much less pronounced than for the combination  $PbTl_2$ , is also found to exist here.

TABLE 3.  $Sb_2Sn_3$ .

$H$	$R$	$T$	$P_{helium}$ in m.m.
42.8 gauss	0.000020 $\Omega$	3.79	5.01
51.4	0.000066		
57.8	0.000121		
70.6	0.000256		
81.3	0.000352		
96.3	0.000439		
139.1	0.000442		
74.9	0.000295		
70.6	0.000256		
83.9	0.000382	3.69	449
96.3	0.000194		
107.0	0.000287		
149.8	0.000441		
96.3	0.000191		
107.0	0.000036	3.58	397
117.7	0.000090		
128.4	0.000173		
149.8	0.000340		
171.2	0.000423		
192.6	0.000441		

<sup>1)</sup> Comm. Leiden N<sup>o</sup>. 193c.

These Proc. Vol. 32, 1929, p. 218.

The value of the magnetic field for which the resistance has recovered half its normal value increases by about 300 gauss per degree temperature

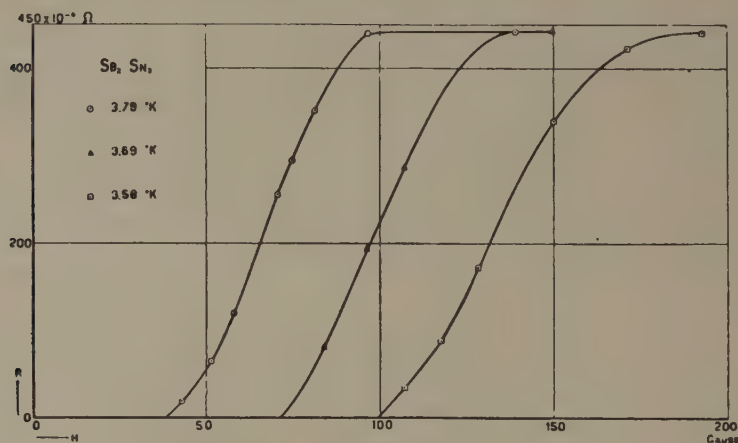


Fig. 2.

TABLE 4.  $Sb_2Sn_3$ .

$T$	$H (W^{1/2})$
$3.79^\circ K$ .	69 gauss
3.69	101
3.58	134

fall, and the value of the magnetic field for which the supraconductivity disappears by about 200 gauss.

For the longitudinal disturbance of pure tin the magnetic threshold value near the transition point rises by about 140 gauss per degree temperature fall.

#### § 4. The eutectic lead-bismuth.

Of this rod too the resistance had been investigated already <sup>1)</sup>.

According to the melting point diagram the eutectic consists of a mixture of a solid solution of lead in bismuth and a solid solution of bismuth in lead. As to the percentages of the solution the different investigations do not agree.

It is however most probable, taking our results into consideration, that about 33 % bismuth is dissolved in lead and about 10 % lead in bismuth.

<sup>1)</sup> Comm. Leiden N°. 197b.

These Proc. Vol. 32, 1929, p. 715.



In earlier researches on eutectics we showed already that it is the solid solution of bismuth in lead that will first become supraconductive and then shortcircuit the resistance of the whole rod. Therefore, though the whole eutectic is used as resistance rod, it is the magnetic disturbance of this solid solution that is determined.

A preliminary investigation showed that the magnetic disturbance would require considerable fields. That is why the further investigations were made in the special cryostat for cryogenic magneto-optic researches. This was placed between the pole shoes of an electro-magnet. It was now possible to make experiments, though in a small space, at helium temperatures and in magnetic fields up to 30000 gauss<sup>1)</sup>.

The results of the measurements are to be found in table 5 and in fig. 3,

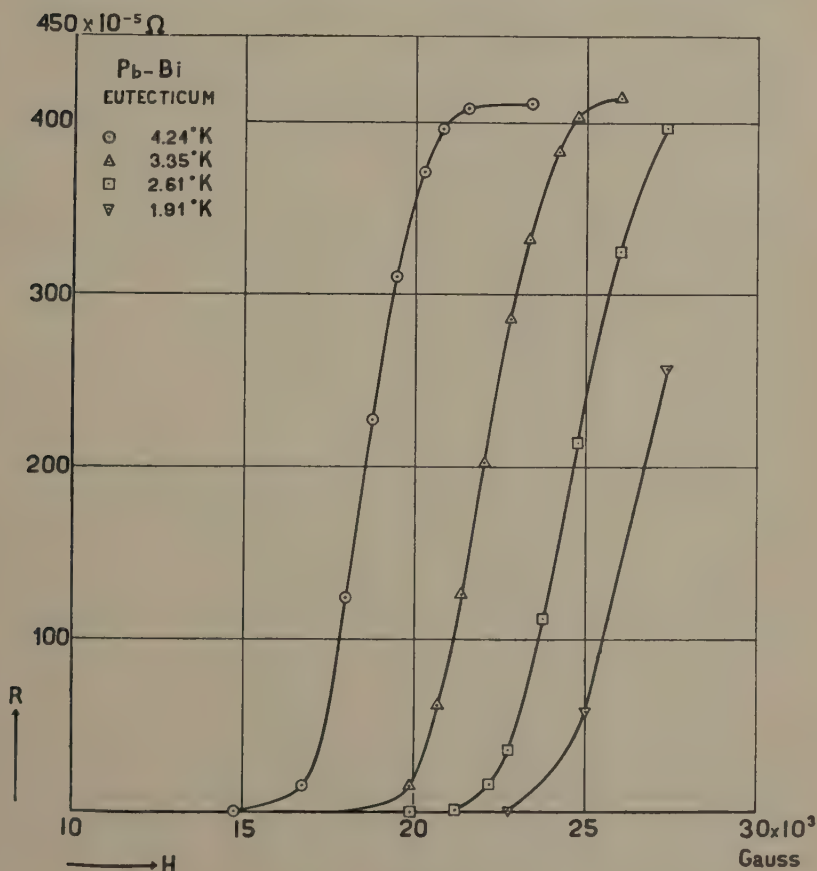


Fig. 3.

<sup>1)</sup> See for more detailed description: JEAN BECQUEREL and W. J. DE HAAS. Comm. Leiden N<sup>o</sup>. 193c.

These Proc. Vol. 32, 1929, p. 218.

TABLE 5. *Pb—Bi* eutecticum.

<i>H</i>	<i>R</i>	<i>T</i>	<i>p<sub>hellum</sub></i> in m.m.
14750 gauss	0.00000 <sup>1</sup> $\Omega$	4.24	776
16750	0.00015		
17600	0.00064		
18000	0.00124		
18750	0.00227		
19450	0.00310		
20250	0.00371		
20800	0.00396		
21600	0.00408		
23400	0.00411		
18750	0.00257		
17850	0.00141		
14750	0	3.35	301
19900	0.00016		
20700	0.00063		
21350	0.00127		
22050	0.00203		
22800	0.00287		
23350	0.00333		
24200	0.00384		
24750	0.00404		
26000	0.00415		
21700	0.00156		
14750	0	2.61	95.7
19900	0.00000 <sup>2</sup>		
21200	0.00001		
22200	0.00016		
22750	0.00036		
23750	0.00112		
24750	0.00214		
26000	0.00325		
27350	0.00397		
23350	0.00082		
19900	0	1.91	18.8
21150	0.00000 <sup>1</sup>		
22750	0.00001		
25000	0.00059		
27350	0.00257		
26000	0.00135		

TABLE 6. *Pb—Bi* eutecticum.

$T$	$H_{(W^{1/2})}$
4.24	16000
3.35	22000
2.61	24600
1.91	26700

while in table 6 the values of  $H_{w^{1/2}}$  for the different temperatures have been given.

The required magnetic fields are evidently very high.

If a solenoid were made of the saturated solid solution of bismuth in lead, we should be able to generate magnetic fields of 14000 gauss at the boiling point of helium without development of heat and at 2° K. even fields of 19000 gauss.

For more detailed researches of the solid solutions of bismuth in lead we made homogeneous solid solutions of 7 %, of 10 % and of 20 % bismuth and for these we investigated the magnetic disturbance in the same way as for the eutectic. The results are to be found in tables 7, 8 and 9.

TABLE 7. *Pb—Bi* (20 % *Bi*).

$H$	$R$	$T$	$P_{\text{helium}}$ in m.m.
7500 gauss	0 $\Omega$	4.24	77.6
8320	0.000048		
9700	0.000531		
11850	0.000948		
14750	0.000996		
23350	0.001071		
9700	0.000568		
9700	0.000002	3.06	203
11150	0.000262		
14750	0.000951		
17800	0.001002		
23350	0.001074		

TABLE 8. *Pb—Bi* (10 % *Bi*).

<i>H</i>	<i>R</i>	<i>T</i>	<i>p</i> <sub>helium</sub> in m.m.
6000 gauss	0 $\Omega$	3.06	203
6750	0.000065		
8250	0.000478		
11150	0.000531		
14750	0.000536		
19900	0.000555		
23350	0.000555		
26000	0.000555		
8250	0.000482		
6750	0.000127		

TABLE 9. *Pb—Bi* (7 % *Bi*).

<i>H</i>	<i>R</i>	<i>T</i>	<i>p</i> <sub>helium</sub> in m.m.
3800 gauss	0 $\Omega$	3.06	203
4550	0.000058		
6000	0.000365		
7500	0.000369		
11150	0.000370		

It is seen, that the required magnetic fields are the higher the more bismuth is dissolved in the lead.

§ 5. Though the researches with the system lead bismuth seem thus to give already useful results we intended to obtain still higher threshold values.

For that purpose we examined an alloy lead-tin-bismuth (15.5 % *Sn*, 32 % *Pb*, 52.5 % *Bi*) and an alloy lead-tin-bismuth-cadmium, (13.1 % *Sn*, 27.3 % *Pb*, 49.5 % *Bi*, 10.1 % *Cd*).

The measurements were made in the same way as for the alloys lead-bismuth. The results are to be found in the tables 10 and 11.

We found, that in both cases the magnetic disturbance occurs nearly at the same magnetic fields as for the eutectic lead-bismuth, so that these



TABLE 10. *Bb—Sn—Bi.*

<i>H</i>	<i>R</i>	<i>T</i>	<i>p<sub>helium</sub></i> in m.m.
14050 gauss	0 $\Omega$	4.24	776
14750	0.000012		
14800	0.000070		
15450	0.000233		
16700	0.000725		
17850	0.001104		
18800	0.001346		
19900	0.001514		
21150	0.001622		
22050	0.001635		
24200	0.001648		
26000	0.001650		
27400	0.001655		
24200	0.001651		
22100	0.001637		
19900	0.001543		
17850	0.001193		
16700	0.000814		
14750	0.000063		
17300	0	3.06	203
17850	0.000011		
19900	0.000544		
22100	0.001145		
24200	0.001489		
26000	0.001631		
27400	0.001661		

alloys of more than two metals do not yield a special advantage for our problem.

Finally we still draw the attention to the fact that for the alloys lead-bismuth as well as for those of tin-lead-bismuth, and for those of tin-lead-

bismuth-cadmium a small hysteresis seems to occur in the magnetic transition figure. We plan however more detailed researches to reach definite conclusions.

TABLE 11. *Pb—Sn—Bi—Cd.*

<i>H</i>	<i>R</i>	<i>T</i>	<i>p<sub>helium</sub></i> in m.m.
14050 gauss	0 $\Omega$	4.24	776
14750	0.000006		
15450	0.000169		
16700	0.000344		
18750	0.000460		
20700	0.000510		
22100	0.000529		
24200	0.000538		
26000	0.000547		
27400	0.000558		
20700	0.000514		
18750	0.000467		
15450	0.000231		
17300	0	3.06	203
17850	0.000002		
19950	0.000316		
22100	0.000441		
24200	0.000508		
26000	0.000542		
27400	0.000553		

**Physics.** — *On the Thermodynamics of Caoutchouc. II. Temperature-change of rubber under adiabatic stretching.* By Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN, J. WOUDA and Miss J. G. EYMERS.

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

In our first communication<sup>1)</sup> it has been shown that the heating-effect which takes place in stretched caoutchouc must be due to hysteresis, because from thermodynamic considerations it is obvious that a substance with a positive coefficient of elongation shows a cooling effect. If this is true, rubber without hysteresis must obey the laws of thermodynamics. We have tested this for rubber of the following composition :

First latex sheet	100	parts	} vulcanised 30 minutes 147° C.
Sulphur	5	"	
D.P.G.	1	"	
Zincoxide	3	"	

which we got from Dr. V. ROSSEM of Rijksrubberdienst, whom we heartely thank for his kindness also on this occasion. It was examined whether this rubber is free from hysteresis by the following method :

A piece of rubber was successively loaded more and more, till the elongation was about 250 %, and than the load was gradually removed. No hysteresis was shown by the substance. When the rubber is submitted to a force which gives a change of length of this amount, the length of the rubber does not alter with the time. When however the elongation is more than 250 %, the length changes slightly with the time, up to an elongation of 370 %, beyond this elongation no alternation in length takes place again. When, in the case of these large extensions, the force is gradually decreased, the elongations come to much larger values than before, when the same force was acted to the rubber from its zero-state. However this is not an effect of hysteresis, for however great the force and however long the time might have been during which the force acted (even more than 24 hours), the rubber always momentarily takes the original length when the weight was removed at once. In fig. 1 the areas from O till E and from B till C must be ascribed to different phases, and the difference between the graph for increasing and decrasing force can be explained by a retardation of phase. Moreover, the slope of the curve AB can be much steeper as in this case, when a longer time between the application of different forces has been taken. Further the rubber in the region DE is not in a stable state,

<sup>1)</sup> These Proceedings 32, N°. 9, p. 1235, 1929.

for a slight impulse affecting the rubber causes the elongation to decrease at once. Since the second phase already shows itself above an elongation of

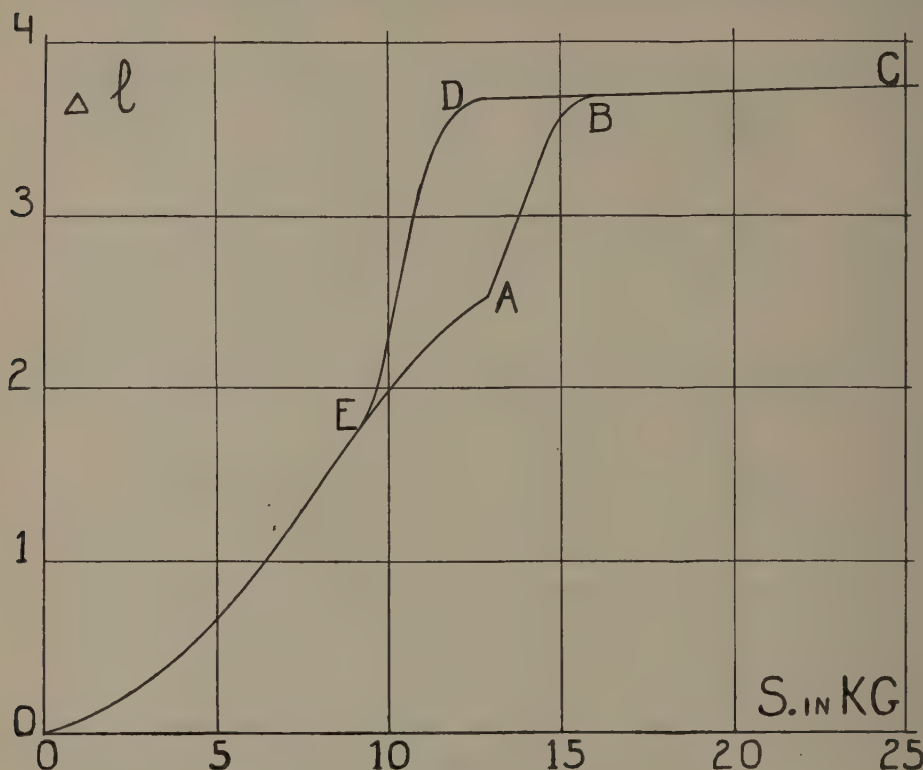


Fig. 1.

200 %, we have taken all our readings for thermodynamic relation below that elongation. It is known that from thermodynamical considerations one can get the formula for the change in temperature :

$$\Delta T = -T \int_0^{\Delta l} \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_S}{\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_l} dl,$$

where  $T$  is the absolute temperature during the measurement ( $\Delta T$  is small compared with  $T$ ),  $S$  is the force and  $\epsilon$ , the energy and thus  $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_l$  the specific heat by constant length per  $\text{cm}^3$  rubber. In order to test this relation the length must be measured as a function of the force at different temperatures. From the curves, giving this (fig. 2), we can deduce  $\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T$  and



$\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_s$ ; besides the dynamical qualities, the specific heat as a function of the elongation has been measured (fig. 3). The  $S-l$  curves were determined

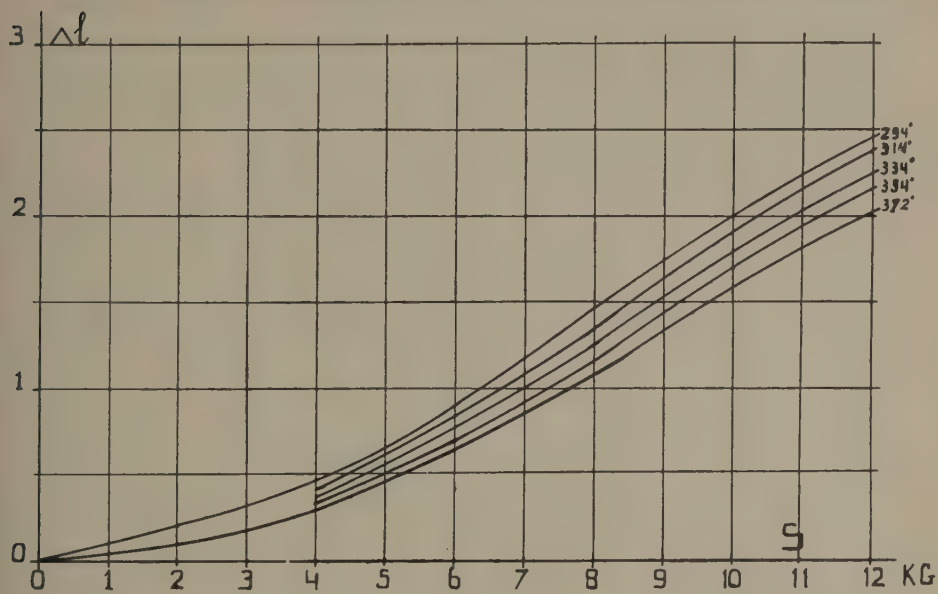


Fig. 2.

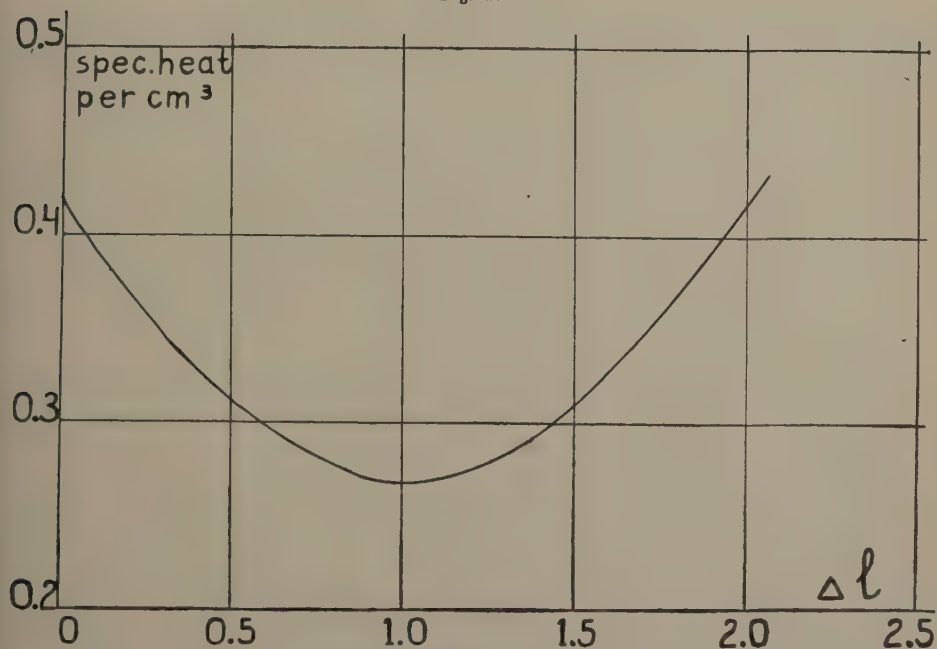


Fig. 3.

in the same way described in our first communication, loading a piece of rubber with different weights and measuring the length with a cathetometer. The rubber is placed in a furnace which could be brought to the desired temperature by electric heating. During a series of measurements the oscillations of temperature were less than  $2^{\circ}$ . The results are plotted in fig. 2. The temperatures used are  $294^{\circ}$ ,  $314^{\circ}$ ,  $334^{\circ}$ ,  $354^{\circ}$  and  $372^{\circ}$  K.

The measurement of the specific heat was somewhat more difficult, as a result of the very bad conduction of heat by the rubber. Finally the following method was adopted: small rings are stamped with a diameter of about 2 cm and a breadth of  $1 \text{ à } 1\frac{1}{2}$  mm. This form of the pieces of rubber is chosen for two reasons, first in order to make the surface as great as possible (in this way we get a better conductivity of heat with the same mass of rubber) and further in order to get a simple way for measuring the stretched rubber. The rings could be stretched on plates of brass of different lengths, which were bent in the form of a cylinder, to occupy as small a space as possible. The cylinder of brass with rubber was heated in an electric furnace up to about  $80^{\circ}$  C (the furnace was kept at this temperature during an hour) and then brought into a calorimeter turning the furnace quickly. The calorimeter is constructed as follows: a vacuum tube of U-form is placed in a water-bath of constant temperature. The lower part of the tube is filled with mercury. In the small branch a thermometer is placed in the mercury, which can be read off to a fiftieth part of a degree through the unsilvered portion of the tube, by means of an eyepiece.

Above the mercury in the wider arm are  $40 \text{ cm}^3$  of distilled water, into which the warm cylinder of rubber is brought. A wire is fixed to the cylinder, which can be moved up and down by a small motor; the rubber itself thus acting as a stirrer. The chosen form of the calorimeter has the advantage that the volume of liquid is as small as possible in comparison to the mass of the rubber and therefore the rise of temperature in the calorimeter as large as possible. We got in this way maximal a rise of the temperature of two degrees. Before and after the rubber was brought into the calorimeter the change of temperature was observed during about an hour, in order to determine the corrections necessary for the gain or loss of heat to the surroundings. The effective waterequivalent of the calorimeter was determined as a function of the volume of the material, with which it was filled; is appeared to increase with that volume. The change of the specific heat per  $\text{cm}^3$  as a function of the elongation is given in fig. 3. Apart from the investigation of the thermodynamical equation the form of the curve for the specific heat is most interesting, as the strong variation of this quantity with the elongation must be of utmost importance for the understanding of the molecular state of rubber. The specific weight of this rubber, necessary to calculate the specific heat per  $\text{cm}^3$ , appears to be 0.915. From the results given in fig. 2, we can calculate  $\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T$  and  $\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_S$  as a function of the extension. These curves obtained are multiplied with each other and divided

by the curve giving the specific heat per  $\text{cm}^3$  as a function of the elongation, where all functions are expressed in C. G. S. units. The resulting curve is given in fig. 4.

$$I = - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T \times \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_S}{\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_l}.$$

The area between this curve and the axis is measured with a planimeter

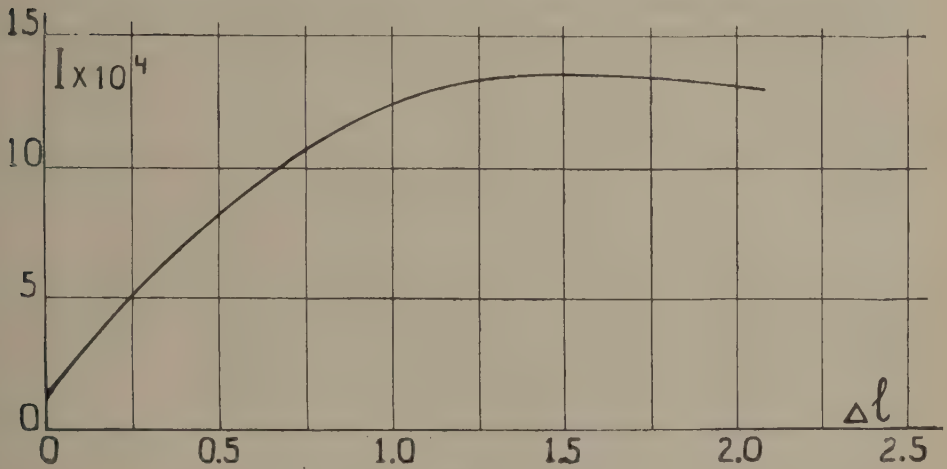


Fig. 4.

for different elongations and multiplied with the absolute temperature at which the generation of heat has been measured ( $\Delta T$  is positive because  $\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_S$  is negative). In order to test the thermodynamics, the generation of heat itself ought to be measured, which has been done by the method described below.

A thermocouple of copper-constantan is sewed in a piece of rubber in the direction in which the displacement of the material along the thermoelement is as small as possible when the rubber is stretched, in that way the generation of heat caused by friction is reduced to a minimum. The other contact of the thermocouple was plunged in a thermoflask filled with water, the temperature of which was absolutely constant during each measurement. The thermoelectric force was measured with a Moll-galvanometer in the circuit of which was placed an arrangement for measuring, the sensitivity for changes of potential. The rubber was clamped in a box between a fixed and a moveable clamp. To the moveable clamp was fixed a drawing rod, the end of which projected from the side of the box and to which was also fixed a stop, by means of which the rubber could be stretched to a given

length. The elongation was determined with a cathetometer, just as in the case of the measurements for the  $S-l$  curves. The time of elongation was small compared with the time the galvanometer took for its deflection. This deflection of the galvanometer was registered during the adiabatic strain and also for a few minutes after. By extrapolation the influence of inertia of the galvanometer and loss of heat to the surroundings could be eliminated. The time necessary for the thermocouple to assume 99 % of the temperature increase of the rubber was calculated to be of the order of  $1/6$  sec. i.e. it can be neglected in comparison to the time necessary for the galvanometer to come to its maximum deflection. The maximum error due to losses of energy by the thermocouple itself is, as calculated, 4 %. The values for the increase on temperature got from experiment and from the theoretical formula have been plotted in fig. 5. The observed and calculated points are indicated

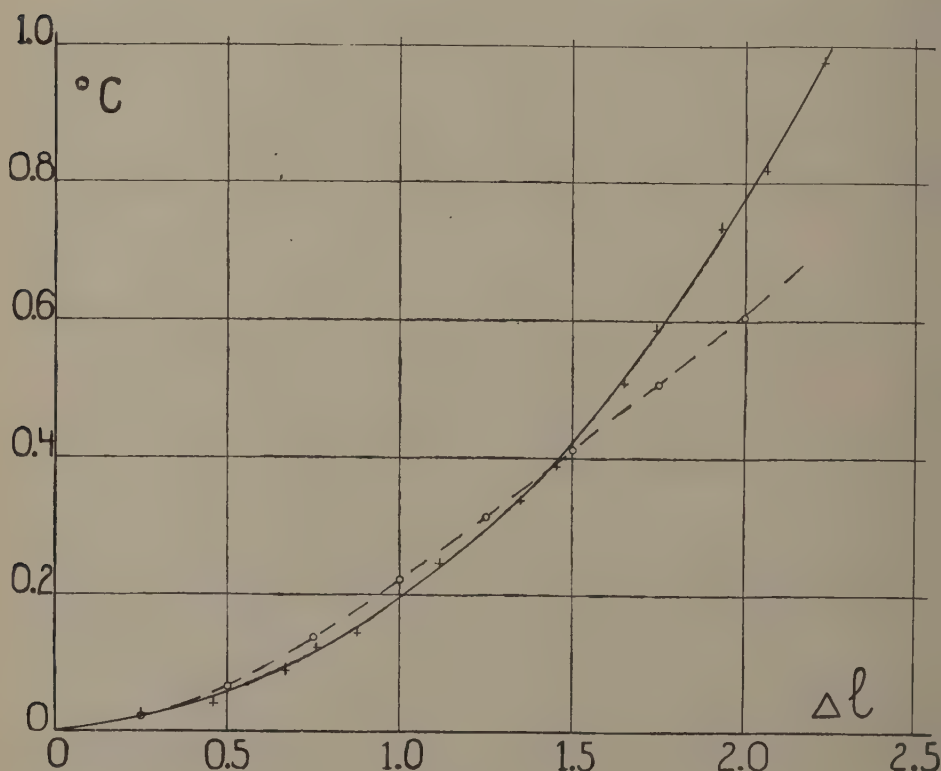


Fig. 5.

by the signs  $+$  and  $o$  respectively. Up to an elongation of 150 % the agreement is satisfactory. Above this elongation the observed rises in temperature are higher than those calculated from the thermodynamical formula. This difference can easily be explained by the influence of the



second phase, which shows itself appreciable above an elongation of 150 %, as fig. 1 shows.

As was pointed out in our former publication, the generation of heat by stretching raw caoutchouc was measured. It was expected that the generation of heat at the transition point would show an anormality owing to the heat of transition. For this reason an amplifier-method was used to measure the temperature with a greater accuracy.

The copper-constantan thermocouple was placed between two pieces of raw caoutchouc. New pieces were used for each measurement in order to eliminate the influence of hysteresis as much as possible. The measurement took place as described above for the measurements with vulcanised rubber. The results are plotted in fig. 6. This curve has the same form as the curves

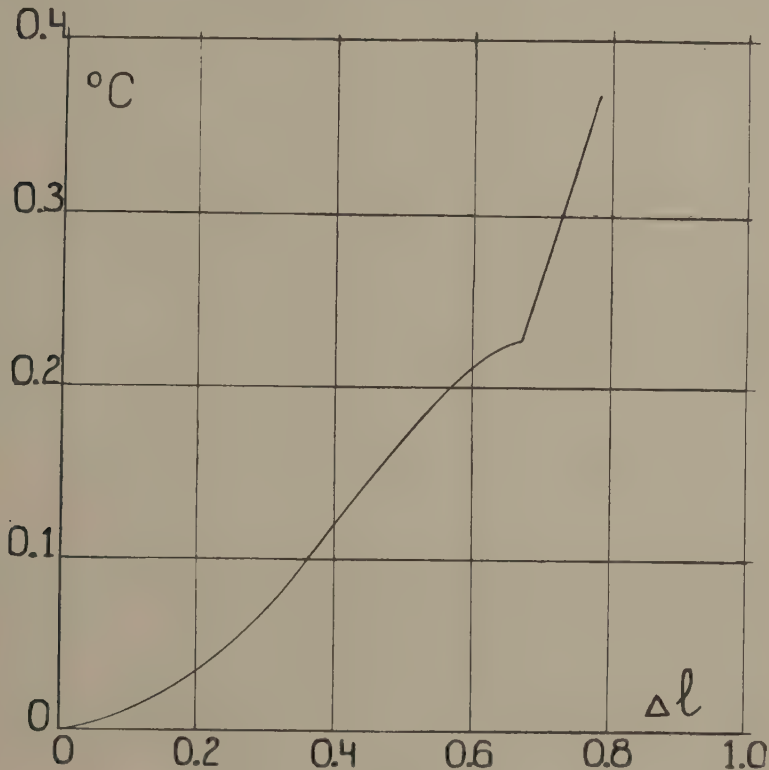


Fig. 6.

for double refraction and elongation as a function of the tension, given in our former paper. Beyond the transition-point, that occurs at an elongation of ca. 70 %, the rise in temperature increases linearly with the length. Further measurements are planned in order to find the relation between hysteresis and heat development.

**Chemistry.** — *The Dimorphism of Gallium-Acetylacetonate.* By F. M. JAEGER.

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

On boiling freshly precipitated gallium-hydroxide with an excess of acetylacetone in a flask provided with a reflux-cooler for some time and extracting the product thus obtained with boiling ethylalcohol, a yellow solution is formed from which on evaporation orange-coloured, hexagonally-shaped plates are deposited, which, according to analysis, represent the anhydrous gallium-acetylacetonate:  $Ga(C_5H_7O_2)_3$ . The substance yields 18.82, resp. 18.95 %  $Ga$ ; calculated: 19.16 %. It is soluble in several organic solvents, insoluble in water. If recrystallized from carbon-disulphide or from methyl- or ethylalcohol, brilliant orange hexagonal plates are obtained, which appear to be monoclinic. This is the form met with in most cases. But if recrystallized from boiling acetone, and especially from ethylacetate, commonly besides the monoclinic ones, somewhat more extended, thick prismatic individuals are obtained, which have orthorhombic symmetry. The substance is evidently dimorphous; but it seems that both modifications can besides each other exist for an undetermined time in contact with their mother-liquor, without any transformation of the one form into the other taking place. Also the specific weights of both modifications differ only slightly, that of the monoclinic form being only unappreciably greater than that of the orthorhombic one. Analysis showed, that both modifications have exactly the same composition, no solvent being present in the crystals.

**I. Monoclinic Modification.**

From alcohol or carbondisulphide the small, thick plates of Fig. 1A are deposited, which ordinarily only show  $\{001\}$ ,  $\{100\}$  and the prisms

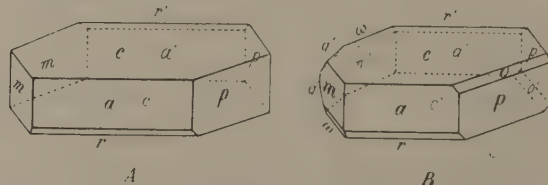


Fig. 1. Monoclinic Modification of Gallium-Acetylacetonate.

$\{110\}$  and  $\{1\bar{1}0\}$ , but sometimes also  $r = \{101\}$  in addition. From boiling acetone or from ethylacetate, the more complicated forms of Fig. 1B are obtained, which, moreover, manifest also:  $\{0\bar{1}1\}$ ,  $\{111\}$  and  $\{2\bar{2}1\}$ ; sometimes  $\{0\bar{2}1\}$  is also observed.

*Monoclinic; probably sphenoidal.*

$$a : b : c = 1.8514 : 1 : 1.0810 ;$$

$$\beta = 81^{\circ}5'.$$

*Forms observed:*  $c = \{001\}$ , predominant and, like  $a = \{100\}$ , very brilliant;  $p = \{110\}$  and  $m = \{1\bar{1}0\}$ , very well reflecting, although yielding not so sharp images as  $a$ ;  $r = \{\bar{1}01\}$ , often absent, but otherwise excellently reflecting;  $o = \{111\}$ , mostly absent, always very narrow and dull;  $\omega = \{\bar{2}21\}$ , quite analogous to  $\{111\}$ , sometimes a little broader than this form;  $q = \{0\bar{1}1\}$ , small and dull;  $s = \{021\}$ , better reflecting than  $q$ . The forms  $q$  and  $s$  are often absent.

The habitus of the crystals is tabular parallel  $\{001\}$  or sometimes longprismatic parallel to their  $b$ -axis.

*Angles:*                      *Measured:*   *Calculated:*

$a : c = (100) : (001) =$	$\star 81^{\circ} 5'$	—
$a : r = (\bar{1}00) : (\bar{1}01) =$	$\star 66 \ 32$	—
$a : m = (100) : (110) =$	$\star 61 \ 20$	—
$r : c = (\bar{1}01) : (001) =$	$32 \ 23$	$32^{\circ} 23'$
$c : o = (001) : (111) =$	$48 \ 13$	$48 \ 4$
$o : p = (111) : (110) =$	$37 \ 31$	$37 \ 40$
$m : m = (1\bar{1}0) : (\bar{1}1\bar{0}) =$	$57 \ 20$	$57 \ 20$
$c : \omega = (001) : (\bar{2}\bar{2}1) =$	$71 \ 15$	$71 \ 21\frac{1}{3}$
$\omega : m = (\bar{2}\bar{2}1) : (\bar{1}1\bar{0}) =$	$23 \ 1$	$22 \ 54\frac{2}{4}$
$c : p = (001) : (110) =$	$85 \ 44$	$85 \ 44$
$c : q = (001) : (0\bar{1}1) =$	$46 \ 56$	$46 \ 53$
$q : s = (011) : (021) =$	$17 \ 58$	$18 \ 2$

No distinct cleavability could be observed besides one parallel to  $\{110\}$ . On  $\{001\}$ ,  $\{101\}$  and  $\{100\}$  orthogonal extinction; the plane of the optical axes is probably  $\{010\}$ . Strongly dichroitic: on  $\{001\}$  for vibrations parallel to the  $a$ -axis orange-yellow, for such perpendicular to it, pale lemon-yellow. The specific weight at  $20^{\circ}$  C. was: 1.414.

## II. Orthorhombic Modification.

From a solution in acetone, sometimes from that in alcohol, but always from that in ethylacetate or a mixture of this and benzene, besides monoclinic individuals, rhombic crystals as represented in Fig. 2 are deposited. From the last mixture the crystals shown in Fig. 2 C are commonly formed; often the crystals from acetone or ethylacetate show an apparently hemimorphic habitus (Fig. 2 B).

*Orthorhombic; probably bisphenoidal.*

$$a : b : c = 1.7124 : 1 : 2.0841.$$

*Forms observed:*  $c=\{001\}$ , very brilliant and predominant;  $a=\{100\}$  and  $m=\{110\}$ , both excellently reflecting;  $r=\{203\}$ , extremely narrow,

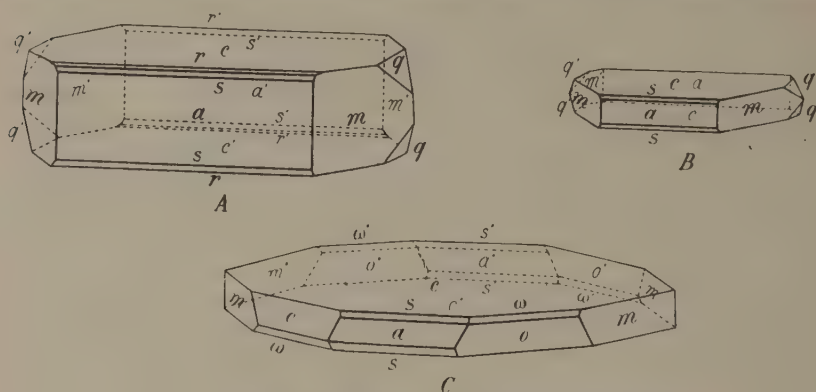


Fig. 2. Rhombic Modification of Gallium-Acetylacetonate.

often absent and otherwise showing only two adjacent faces;  $s=\{201\}$ , broader than  $r$ , better reflecting, but showing also only two faces;  $q=\{011\}$ , well developed and yielding very sharp reflexes;  $o=\{2\bar{1}1\}$ , well developed and very brilliant;  $\omega=\{211\}$ , narrow and dull, only badly reflecting. The habitus of the crystals is tabular parallel  $\{001\}$  or thick prismatic parallel to the  $b$ -axis. The crystals from ethylacetate + benzene show a bisphenoidal habitus.

*Angles:*

*Measured: Calculated:*

$a : m = (100) : (110) =^* 59^\circ 43'$	—
$c : q = (001) : (011) =^* 64 \quad 22$	—
$m : q = (110) : (011) = 38 \quad 53$	$38^\circ 52\frac{1}{2}'$
$m : m = (110) : (\bar{1}10) = 60 \quad 34$	$60 \quad 34$
$q : q = (011) : (0\bar{1}\bar{1}) = 51 \quad 15$	$51 \quad 16$
$c : m = (001) : (110) = 90 \quad 3$	$90 \quad 0$
$s : q = (201) : (011) = 80 \quad 26$	$80 \quad 32\frac{1}{2}$
$s : m = (201) : (110) = 62 \quad 5$	$62 \quad 9\frac{1}{2}$
$c : r = (001) : (203) = 38 \quad 57$	$39 \quad 3$
$r : s = (203) : (201) = 28 \quad 53$	$28 \quad 37$
$s : a = (201) : (100) = 22 \quad 10$	$22 \quad 20$
$c : s = (001) : (201) = 67 \quad 50$	$67 \quad 40$
$c : o = (001) : (2\bar{1}1) = 72 \quad 40$	$72 \quad 40\frac{1}{2}$
$a : o = (100) : (2\bar{1}1) = 43 \quad 28$	$43 \quad 31$
$a : \omega = (100) : (211) = 43 \quad 35$	$43 \quad 31$
$c : \omega = (001) : (211) = 72 \quad 29$	$72 \quad 40\frac{1}{2}$
$o : \omega = (2\bar{1}1) : (211) =$	$— \quad 76 \quad 45$

No distinct cleavability was observed.

The plane of the optical axes is  $\{010\}$ ; the apparent angle of the axes is small and the first bisectrix perpendicular to  $\{001\}$ . The dichroism is exactly opposite to that of the other modification: on  $\{001\}$  for vibrations parallel to the  $b$ -axis the colour is orange-yellow, for those parallel to the  $a$ -axis pale yellow.

At  $20^{\circ}\text{C}$ . the specific weight is: 1.408.

On heating at  $55^{\circ}\text{C}$ . for several hours, the salt did not appreciably loose in weight; at  $78^{\circ}\text{C}$ . it lost about 1.2 %; at  $110^{\circ}\text{C}$ . about 18.2 %; at  $100^{\circ}$  in vacuo: 19.8 % the crystals becoming opaque and almost white in colour, but preserving their original shape. Analysis of these crystals gave: 21.1 %  $\text{Ga}$ ; the substance evidently is the *acetylacetonate* minus about half a molecule  $\text{C}_5\text{H}_8\text{O}_2$ .

The same experiment made with a finely powdered preparation in vacuo at  $100^{\circ}\text{C}$ . only showed a loss of weight of 4 to 6 %; it seems, therefore, that the loss of weight must principally be attributed to liquid inclosed in the vacuoles of the crystals and that all three molecules of the *acetylacetone* are in the salt about equally firmly bound. It may be, however, that the colourless product finally obtained is:  $\text{Ga}_2(\text{C}_5\text{H}_7\text{O}_2)_5$ , which requires 22.0 %  $\text{Ga}$ ; in that case four molecules of the *acetylacetone* should be supposed to be bound in the usual way, while the fifth one should link together the two atoms of  $\text{Ga}$  by means of two residual valencies of both oxygen-atoms. As this gives for the  $\text{Ga}$ -atom an unusual value of its co-ordination-number, this decomposition will be studied more in detail.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and  
Physical Chemistry of the University.*

---



**Botany.** — *Ueber die Reizbewegungen der Staubblätter von Sparmannia africana.* (Vorläufige Mitteilung). Von ERWIN BÜNNING. (Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT.)

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

Schon in einer früheren Arbeit (1929) habe ich Ergebnisse über die Untersuchung von Seismoreaktionen (seismonastische und seismotropische Bewegungen) der Staubblätter und Narben verschiedener Pflanzen mitgeteilt. Es blieben noch viele wichtige Probleme ungelöst, die ich jetzt an einem der Versuchsobjekte, nämlich an *Sparmannia africana* erneut in Angriff genommen habe. Ich will in dieser vorläufigen Mitteilung nur über die Hauptergebnisse berichten, zur eingehenderen Begründung der Ergebnisse verweise ich auf die bald folgende ausführliche Arbeit.

## I.

Es ist bekannt, dass die Filamente der Staubblätter (die äusseren sind Staminodien) von *Sparmannia* nach einer Reizung nastische, nach *aussen* gerichtete Bewegungen ausführen.

Die für diese Mitteilung wichtigen Ergebnisse meiner früheren Untersuchung sind: Infolge seismischer Reizung entsteht eine Permeabilitäts-erhöhung. Erst wenn die Permeabilitätserhöhung einen bestimmten Grad erreicht hat, wird durch den Wanddruck Zellsaft (nicht reines Wasser) ausgepresst. Die Permeabilitätserhöhung ermöglicht, wenn sie nicht mehr zur Reaktion hinreicht, aber doch noch nicht völlig abgeklungen ist, eine ungewöhnlich schnelle Endosmose. Eine Permeabilitätserhöhung ist noch mehrere Minuten nach der Reizung vorhanden, während die zur Reaktion hinreichende Permeabilitätserhöhung nur einige Sekunden dauert. Die Krümmungsgeschwindigkeit ist abhängig von dem Grad der Permeabilitäts-erhöhung. Bis zur Wiederherstellung der normalen Permeabilität (nicht nur bis zur Beendigung der Reaktion) besteht ein Refraktärstadium, die Erregung (Permeabilitätserhöhung) ist dann so kurzdauernd und niedrig, dass überhaupt keine (absolutes Refraktärstadium) oder nur eine geringe Reaktion (relatives Refraktärstadium) erfolgen kann. Während seismischer Erregung ist eine semipermeable Plasmahaut wenigstens stellenweise nicht vorhanden.

## II.

Früher hatte ich auch schon die starke Quellbarkeit der Zellmembranen der reaktionsfähigen Zellen erwähnt.

Bei den (reaktionsfähigen) Epidermiszellen der Filamentbasis konnten an diesen quellbaren Membranen während der Reizbewegungen interessante Beobachtungen gemacht werden. Im ungereizten Zustand zeigt sich folgendes Bild (Fig. 1a). Die äussere Membran besteht deutlich aus drei Schichten: einer inneren hauptsächlich aus Zellulose bestehenden, einer äusseren

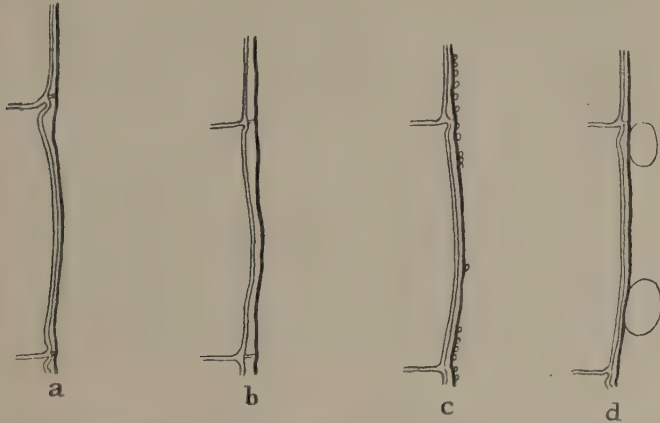


Fig. 1. Zellwand der Epidermis aus dem Filament von Sparmannia.  
a, ungereizt; b, gereizt; c und d Tröpfchenausscheidung.

(Cuticula) und einer Mittelschicht. Diese Mittelschicht ist es, die die starke Quellbarkeit bedingt. Fig. 2 zeigt die Membran nach einer mit Säure vorgenommenen Quellung.

Wird gereizt, so quillt die mittlere Schicht der Zellmembran (Fig. 1b).

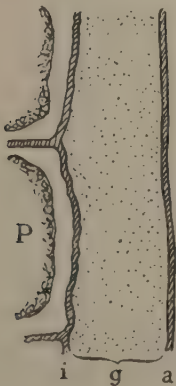


Fig. 2. Wie Fig. 1 aber in verd. Schwefelsäure  
gequollen.  
P, Protoplast, i, innere, ä, äussere, g, gequollene  
Lamelle.

Durch den von der inneren Membran ausgeübten Wanddruck wird (ermöglicht durch die Permeabilitätserhöhung) Zellsaft ausgepresst; der Zellsaft wird in der mittleren Membran gespeichert. Der Zellsaftverlust bedingt eine Verkürzung der Zellen und damit die Reizbewegung. Die Membranquellung (sie beschränkt sich zur Hauptsache auf die nach aussen liegenden Wände)

veranlasst eine geringe Verdickung des Filaments. An dieser Verdickung ist aber niemals eine Verbreiterung des Zelllumens beteiligt, sondern nur die Wandverdickung.

Nach Beendigung der Reaktion saugt die Zelle wieder Flüssigkeit aus den Zellwänden auf, so dass diese ihr Volumen auf den früheren Betrag reduzieren. In den meisten Fällen aber gelangt nur ein kleiner Teil der Flüssigkeit wieder ins Zellinnere, der andere Teil gelangt nach aussen (Fig. 1c), so dass sich auf der Cuticula zahlreiche kleine Tröpfchen ansammeln, die sich (besonders nach wiederholter Reizung) zu ansehnlichen Tropfen vereinigen (Fig. 1d).

### III.

Die Geschwindigkeit der Zellsaftausscheidung liefert uns (ebenso wie die Wiederaufnahmegeschwindigkeit von Flüssigkeit nach beendeter Reaktion) ein Mass für die Höhe der Permeabilität (BÜNNING 1929).

Fig. 3 zeigt auf der Ordinate die Geschwindigkeit der Bewegung (d.h. die

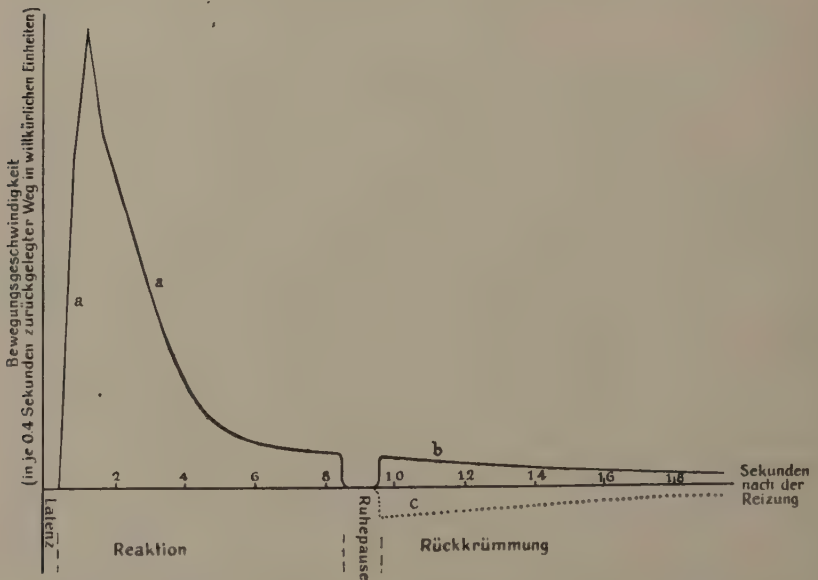


Fig. 3. Verlauf der Krümmungsgeschwindigkeit bei einer Reizbewegung.

a, Krümmungsgeschwindigkeit während der Reaktion. b, während der Rückkrümmung. c, wie b, aber auch die geänderte Richtung der Bewegungsgeschwindigkeit berücksichtigt.

in bestimmten Zeitabschnitten zurückgelegten Krümmungswinkel) zu verschiedenen Zeiten nach Beginn der Reizung. In der gleichen Abbildung ist auch die Geschwindigkeit der Rückkrümmung eingetragen. Diese Geschwindigkeit der (nach innen erfolgenden) Rückkrümmung ist, da ihre Richtung ja entgegengesetzt ist zur Geschwindigkeitsrichtung der Reaktion mit nega-

tiven Ordinaten eingezeichnet (punktierte Kurve). Ausserdem aber ist, um die absoluten Beträge der Geschwindigkeiten vergleichen zu können, dieser zweite Teil auch mit positiver Ordinate (ausgezogene Kurve) eingezeichnet. Zwischen Reaktion und Rückkrümmung liegt eine kurze Ruhepause. Wir sehen aus Fig. 3, dass (abgesehen von der Richtung) die Rückkrümmung mit fast der gleichen Geschwindigkeit beginnt, mit der die Krümmung aufgehört hat. Das ist eine gute Bestätigung für die schon früher vertretene Ansicht, dass der (sehr schnell erfolgende) Beginn der Rückkrümmung ermöglicht wird durch denselben Erregungsvorgang, der auch die Krümmung ermöglicht.

Wenn es richtig ist, dass oberhalb einer bestimmten Permeabilität nur Zellsaftausscheidung, bei einer geringeren Permeabilität aber höchstens beschleunigte Flüssigkeitsaufnahme erfolgen kann, so ist zu erwarten, dass auch bei Reizung unter geänderten Bedingungen die Krümmung unabhängig von der Grösse und Dauer der Reaktion immer bei einer ganz bestimmten Permeabilität, also bei einer ganz bestimmten Krümmungsgeschwindigkeit in die Rückkrümmung umschlägt. Fig. 4 bestätigt diese

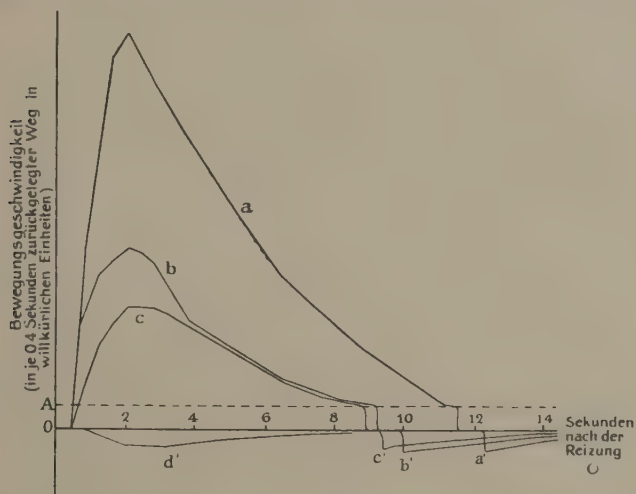


Fig. 4. Verlauf der Krümmungsgeschwindigkeit. Bei den nach aussen gerichteten Bewegungen ist die Geschwindigkeit mit positiver, bei den nach innen gerichteten Bewegungen mit negativer Ordinate eingezeichnet. Kurve  $a + a'$  normales Filament;  $b + b'$ , sowie  $c + c'$  Reizung im Refraktärstadium;  $d'$  Reizung im absoluten Refraktärstadium.

Konsequenz restlos. Kurve  $a$  zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit von Krümmung und Rückkrümmung nach einer ersten Reizung, Kurve  $b$  nach einer Reizung desselben Filaments während eines Refraktärstadiums, Kurve  $c$  von demselben Filament, als dieses sich in einem noch mehr refraktären Zustand befand. Kurve  $d$  endlich während einer Reizung im absoluten Refraktärstadium, im letzteren Fall erreicht die Permeabilität

überhaupt nicht den zur Zellsaftausscheidung erforderlichen Wert, es erfolgt nur Flüssigkeitsaufnahme, und damit Krümmung nach innen (diese ist natürlich sehr gering). Die Abbildung zeigt, dass unabhängig von der Reaktionsstärke das Umschlagen in die Rückkrümmung immer erfolgt, wenn die Bewegungsgeschwindigkeit auf den durch die Ordinate *A* gekennzeichneten Betrag herabgesunken ist. (In der Abbildung ist auch die Richtung der Geschwindigkeit berücksichtigt).

Eine weitere Bestätigung für unsere Deutung der Bewegung ist, dass die Krümmung nicht nur immer bei einer ganz bestimmten Permeabilität aufhört, sondern auch immer mit einer ganz bestimmten Permeabilität beginnt, und dass diese beiden Permeabilitätswerte (d.h. Werte für die Geschwindigkeit der Aufnahme bzw. Abgabe von Flüssigkeit) einander gleich sind.

So ergibt sich die Berechtigung des schon früher von mir gegebenen Schemas für die Reizbewegung (Fig. 5). Die geringe Permeabilität während

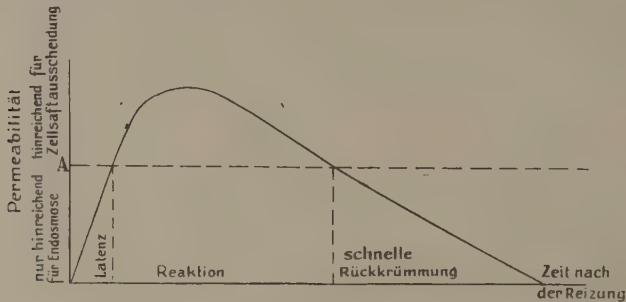


Fig. 5. Schema für den Verlauf einer Erregung (Permeabilitätserhöhung). Im Gegensatz zum tatsächlichen Verlauf der Permeabilitätserhöhung ist der oberhalb *A* liegende Kurventeil mit viel zu kleiner Ordinate gezeichnet, und der Abschnitt bis zum Permeabilitätsmaximum mit viel zu grosser Abszisse.

der Latenzzeit kann ebenso wie die geringe Permeabilität während des ersten Teils der Rückkrümmung zu einer nach innen gerichteten Krümmung (d.h. zu Flüssigkeitsaufnahme) führen.

#### IV.

Wodurch entsteht die Permeabilitätserhöhung? D.h.: wie kommt es, dass die Semipermeabilität teilweise zerstört wird?

Zwei Arten von Erklärungsmöglichkeiten bestehen hier. Erstens, nur die direkte Reizwirkung ist mechanisch bedingt, die späteren Änderungen entstehen chemisch (bzw. kolloidchemisch). Zweitens, der Verlust der Semipermeabilität ist *nur* eine *direkte* Wirkung des mechanischen Reizes. BOAS (1928) hält die zweite Möglichkeit für verwirklicht. Er betrachtet die Erregung nur als eine Thixotropie (Schüttelungsumwandlung). Ich will mich hier damit begnügen zu zeigen, dass nicht einmal die erste Wirkung des mechanischen Reizes eine Thixotropie sein kann.



Man kann eine Reaktion auslösen, indem man ein Filament mit einer Nadel nach innen biegt. Hierzu ist (verschieden je nach den äusseren Bedingungen) eine ganz bestimmte Filamentbiegung erforderlich. Sagen wir beispielsweise eine Biegung um einen Winkel von  $10^\circ$ . Es ist nun ganz einerlei, ob diese Biegung in 0.2 Sekunden oder in mehreren Sekunden ausgeführt wird. Die Reizschwelle wird immer gerade bei einer Biegung des Filaments um  $10^\circ$  erreicht. Schon das ist mit der Annahme einer Thixotropie unvereinbar. Aber weiter, läge Thixotropie vor, so müsste man erwarten, dass auch ein Krümmungswinkel um  $9^\circ$  eine Reaktion hervorrufen kann, sofern diese Biegung um  $9^\circ$  sehr oft hintereinander vorgenommen wird, d.h. wenn das Filament geschüttelt wird. Man kann aber das Filament minutenlang sehr schnell um  $9^\circ$  schütteln, ohne dass Reaktion eintritt. Sobald man nach diesem minutenlangen Schütteln um  $10^\circ$  biegt, tritt Reaktion ein.

Wird ein Filament mit einer Nadel nach innen gebogen, so tritt eine passive Dehnung der (in der Hauptsache ja auf der Aussenseite liegenden) reaktionsfähigen Zellen ein. Ich vermute, dass diese Dehnung, wenn sie einen gewissen Betrag überschreitet, Zerreißung der semipermeablen Membran bedingt. Die oben genannten Versuche stehen mit dieser Deutung in Einklang. Für diese Vermutung spricht ferner, dass die mit einer Nadel vorgenommene Filamentbiegung zur Ermöglichung einer Reaktion viel stärker sein muss, wenn das Filament nicht nach innen, sondern nach aussen gebogen wird. Es erscheint durchaus möglich, dass auch diese nach aussen gerichtete Biegung mit einer Nadel durch Zerrung der Zellen schliesslich eine Zerreißung der semipermeablen Membranen bedingen kann.

## V.

Die Zerreißung der semipermeablen Membranen allein genügt keineswegs schon zur Erklärung der Permeabilitätserhöhung. Schon aus dem Grunde nicht, weil das Permeabilitätsmaximum nicht sofort, sondern erst einige Sekunden nach der Reizung erreicht wird. Es müssen weitere Aenderungen stattfinden.

Nach dem Zerreißen der semipermeablen Vakuolenhaut kann Zellsaft in das Plasma eindringen. Es ist naheliegend, dass die Zellsaftbestandteile (oder einige von ihnen) als „Reizstoffe“ wirksam sind, und weiter die Semipermeabilität zerstören. Dass ein Reizstoff nicht etwa erst gebildet wird, geht daraus hervor, dass Presssaft von abgekühlten (und dadurch nicht-reaktionsfähigen) Filamenten eine Reaktion in reaktionsfähigen Filamenten hervorrufen kann; ebenso wie übrigens auch Presssaft aus den nicht reizbaren oberen Filamentteilen und aus den inneren Teilen des Blütenbodens Reaktion hervorrufen kann.

Wie kann durch den Zellsaft (durch den Reizstoff) die Semipermeabilität zerstört, also die Permeabilität erhöht werden? Permeabilitätszunahme nach Quellungszunahme ist schon oft beobachtet worden, aber es ist wenig

wahrscheinlich, dass die Permeabilität dabei so weit steigen kann, wie es nach der Reizung der Fall ist. Ausserdem besteht die Möglichkeit einer Zerstörung der Semipermeabilität durch Ausfällung der semipermeablen Membran, ebenso wie etwa bei der Hitze-koagulation.

Durch Versuche, auf die ich hier nicht eingehen will, konnte gezeigt werden, dass eine Permeabilitätserhöhung durch Quellungszunahme bei der Erregung wahrscheinlich nicht vorliegt. Dagegen ist die Annahme, dass die Reizstoffe des Zellsaftes eine Koagulation bedingen, schon deshalb wahrscheinlich, weil die reizbaren Zellen junge Zellen sind, in denen erfahrungsgemäss die Plasmastabilität sehr gering ist.

Ist die Annahme einer Koagulation richtig, so muss bei Erhöhung der Stabilität eine Verringerung der Reaktionsfähigkeit eintreten. Ein Mittel zur Steigerung der Stabilität ist die Erhöhung der Hydratation. Wenn also unsere Vermutung richtig ist, so muss die Reaktionsfähigkeit der Zellen bei steigender Hydratation abnehmen. Das konnte nun in sehr schöner Weise bestätigt werden. Die Anionen verringern die Reaktionsfähigkeit in der Reihenfolge, wie sie als hydratationssteigernd bekannt sind :



Man findet diese HOFMEISTERSche Ionenreihe so deutlich, wie nicht oft bei biologischen Vorgängen ausgeprägt, wenn die Salzkonzentrationen nicht sehr gering sind (am besten stärker als 0.1 Mol.) Erhöhung der Wasserstoffionenkonzentration wirkt ebenso wie ein quellungförderndes Salz. Erhöhung der  $\text{OH}'$  wirkt oft sogar entgegengesetzt, wenn nämlich die Erhöhung sich innerhalb bestimmter Grenzen hält. Durch Vergrösserung der  $\text{OH}'$  Konzentrationen (also durch Erhöhung des  $p_{\text{H}}$  Wertes) gelingt es leicht, die schädigende Wirkung eines den Hydratationsgrad erhöhenden Salzes abzuschwächen oder ganz aufzuheben.

Im Gegensatz zu dem grossen Einfluss, den die Aenderung des Hydratationsgrades durch bestimmte Ionen auf die Reaktionsfähigkeit ausübt, ändert sich die Reaktionsfähigkeit höchstens ganz unbedeutend, wenn durch Aenderung der Dampfspannung des umgebenden Mediums Wasserzufuhr oder Wasseraustritt aus den reaktionsfähigen Zellen bewirkt wird. Man kann durch Rohrzucker soviel Wasser entziehen, dass fast Plasmolyse eintritt, ohne eine starke Beeinträchtigung der Reaktionsfähigkeit zu beobachten (Fig. 6). Man kann auch durch quellungfördernde Salze in hohen Konzentrationen einen starken Wasserentzug hervorrufen; die Reaktionsfähigkeit bleibt dann noch bei einem viel stärkeren Wasserentzug erhalten, als wenn schwächere Konzentrationen desselben Salzes angewandt werden, die zwar nicht so schnell schädigend wirken, aber kaum osmotisch Wasser entziehen.

Interessant ist die Art der durch die Aenderung des Hydratationsgrades bedingten Schädigungen. Aus ihr sehen wir, dass es sich um eine ganz andere Art von Schädigung handelt als sie durch typische Gifte, wie etwa Narkotika oder Schwermetallsalze hervorgerufen wird. Bei der Einwirkung von narkotisierenden Stoffen oder von Schwermetallsalzlösungen ver-

schwindet die Reaktionsfähigkeit der Zellen in der Weise, dass die möglichen Reaktionen allmählich immer schwächer und kurzdauernder werden.

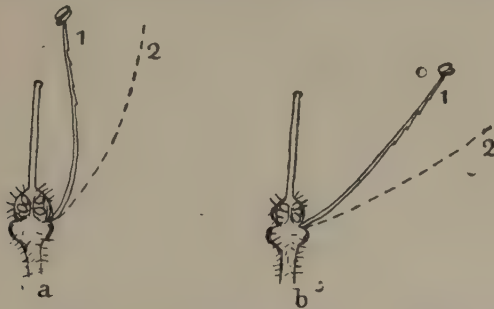


Fig. 6. Längsschnitt durch eine Blüte; nur ein Staubblatt gezeichnet. *a*, normal; *b*, aus den reaktionsfähigen Zellen osmotisch viel Wasser entzogen durch 15 Minuten Aufenthalt in 0.4 Mol. Rohrzuckerlösung. 1. Ruhelage; 2. nach Reizung.

Ganz anders die quellungfördernden Ionen, diese ändern kaum die Dauer der Erregung (Permeabilitäts-erhöhung), sondern im wesentlichen nur die Grösse der Reaktion (den Krümmungswinkel). Das muss auch so sein nach unserer Annahme, dass die starke Permeabilitäts-erhöhung möglich wird, weil das Plasma sehr wenig stabil ist. Erhöhen wir die Stabilität durch Aenderung des Hydratationsgrades, so müssen danach die durch Reizung möglichen Permeabilitäts-änderungen immer geringer werden. Es muss sich also, wenn unsere Annahme richtig ist, folgendes Schema ergeben (Fig. 7,

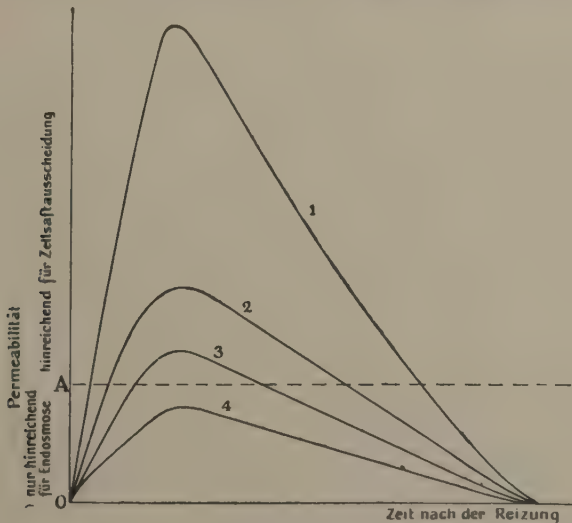


Fig. 7. Verlauf der Erregung (Permeabilitäts-erhöhung) bei verschiedenen Hydratations-grad. 1—4 zunehmende Hydratation. Schematisch. Verzerrung der Kurven wie bei Fig. 5 angegeben.

in Anlehnung an Fig. 5). Kurve 1 entspricht der Permeabilitätsänderung nach Reizung im normalen Zustand, die Kurven 2, 3, 4 stellen den Permeabilitätsverlauf nach zunehmender Quellung dar. Aus diesem Schema lassen sich einige experimentell nachprüfbare Konsequenzen ableiten. Je stärker die Quellung ist, umso länger muss die Latenz dauern (die Latenz dauert von O bis zur Erreichung der Ordinate A). Je stärker die Quellung ist, umso kleiner muss die Dauer der nach aussen gerichteten Bewegung sein, umso grösser muss aber die Dauer der schnellen Rückkrümmung sein. Bei sehr starker Quellung (Kurve 4) muss schliesslich nur noch eine nach innen gerichtete Krümmung stattfinden können.

Diese Konsequenz, dass bei der Einwirkung quellungfördernder Salze der mit *Zellsaftausscheidung* verbundenen Krümmung nach aussen eine mit *Flüssigkeitsaufnahme* verbundene Krümmung nach innen vorausgehen muss, und dass bei zunehmender Quellung schliesslich überhaupt nur noch Wasseraufnahme, also Krümmung nach innen eintreten kann, konnte experimentell restlos bestätigt werden. Fig. 8 zeigt solche Bewegungen bei zunehmender Quellung. Die nach innen gerichteten Reizbewegungen sind keineswegs sehr gering. Werden die Salze mit Wasser wieder ausgewaschen, so findet man, dass die Schädigung vollkommen reversibel ist. Die nach innen gerichteten Bewegungen werden wieder kleiner und kurzdauernder, die nach aussen gerichteten Bewegungen werden wieder stärker und länger dauernd. Nach einigen Minuten ist wieder die normale Reizbarkeit erreicht.

*Wir können also aus den Sparmanniastaubgefässen nach Belieben Organe machen, die nach einer Reizung mit Zellsaftausscheidung reagieren, oder solche, die nach Reizung mit Flüssigkeitsaufnahme reagieren. Im ersteren Fall erfolgen die nastischen Bewegungen nach aussen, im letzteren Fall nach innen. Diese Erscheinung gewinnt nicht nur dadurch an Interesse, dass sie auf Grund der entwickelten Theorie gefordert werden muss, sondern auch noch dadurch, dass hier die seismonastisch reagierenden Organe experimentell umgewandelt werden können in Organe mit Reizbewegungen, die, wenigstens im äusseren Verlauf, übereinstimmen mit einer ganz anderen Gruppe von Reizbewegungen, nämlich mit den Bewegungen der Ranken und Droseraceen. Auch bei den Ranken und bei den Droseratentakeln findet die Reizbewegung ja unter Flüssigkeitsaufnahme statt. Hier werden wir auch an die seismonastischen Bewegungen der Mimose erinnert, bei denen auf der einen Seite des Gelenkes Flüssigkeitsabscheidung, auf der anderen Seite aber Flüssigkeitsaufnahme erfolgt (WEIDLICH 1930). Ob diese Parallelen nur äusserlich sind, oder das Wesen der Sache treffen, hoffe ich durch weitere Untersuchungen feststellen zu können.*

Die Uebereinstimmung der Theorie mit den experimentellen Erfahrungen berechtigt uns zu folgender (in der ausführlichen Arbeit näher zu begründenden) Vorstellung von der Sparmanniareizbewegung. Durch den Reiz wird die Vakuolenhaut zerrissen. Es dringt Zellsaft in das Plasma ein und bewirkt eine Ausfällung der semipermeablen Vakuolenhaut. Diese Aus-



fällung wirkt umso stärker permeabilitätserhöhend, je geringer die Stabilität der Kolloide dieser Haut ist. Bei geringer Permeabilitäts-erhöhung wird Flüssigkeit eingesogen, bei stärkerer Permeabilitäts-

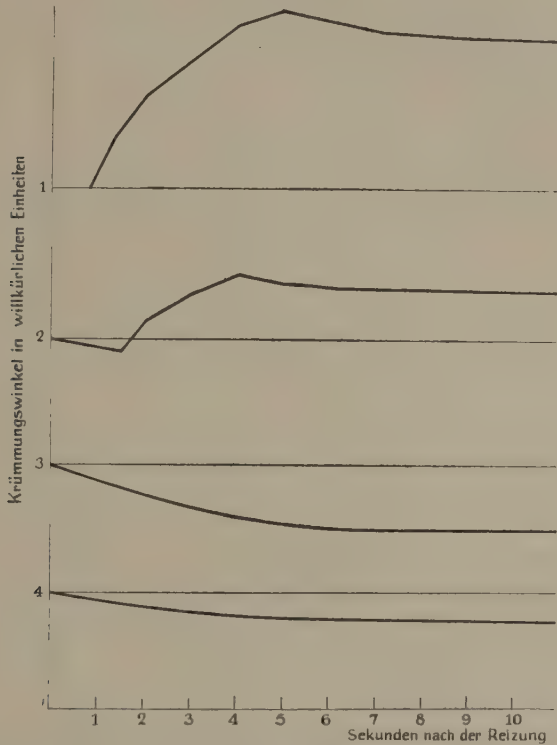


Fig. 8. Verlauf der Krümmung bei verschiedenem Hydratationsgrad. (Es ist zu beachten, dass hier nicht wie bei Fig. 3 und 4 der Verlauf der Krümmungsgeschwindigkeit gezeichnet ist, sondern der Gesamtkrümmungswinkel). 1—4 zunehmende Hydratation. Die eingezeichneten Abszissen sind die Ruhelagen. Der Winkel, den die Filamente zu den verschiedenen Zeiten mit der Ruhelage bilden, ist mit positiver Ordinate eingezeichnet, wenn das Filament mehr nach aussen, mit negativer Ordinate, wenn es mehr nach innen liegt als bei der Ruhelage. Den Kurven 1, 2, 4, in Schema Fig. 7 entsprechen ungefähr die Kurven 1, bzw. 2, bzw. 3 dieser Fig. 8. Der verschiedene starke Hydratationsgrad wurde hervorgerufen durch verschieden langen Aufenthalt in einer 0.3 mol. NaCl Lösung. 1. ohne NaCl Behandlung. 2. war 10 Min. 3. 15 Min. und 4. 20 Min. in NaCl.

erhöhung wird Zellsaft durch den Druck der inneren Lamelle der Zellwand ausgepresst und in der mittleren Lamelle der Zellwand gespeichert. Von dort gelangt die Flüssigkeit zum Teil wieder ins Zellinnere, zum anderen Teil sammelt sie sich in Tropfenform aussen auf der Cuticula.

*Botanisch Laboratorium.*

*Utrecht, März 1930.*



## LITERATURVERZEICHNIS.

- BOAS, F., Die Pflanze als kolloides System. Freising—München 1928.
- BÜNNING, E., Untersuchungen über die Seismoreaktionen von Staubgefäßen und Narben. Zeitschr. f. Bot. Bd. 21. 1929. 465.
- WEIDLICH, H. Die Bewegungsmechanik der Variationsgelenke. Botan. Arch. Bd. 28. 1930. 219.
-

**Mathematics.** — *Ueber Differentialinvarianten einer verallgemeinerten GALILEI-NEWTON-Gruppe III.* Von C. G. G. VAN HERK. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK.)

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

## § 12. Die Reduktion der Invarianten $K$ .

Sich stützend auf Formel (53) und Satz 4 möchte man versuchen, schon jetzt die Reduktion der Differentialinvarianten  $K$  durchzuführen, indem man die Möglichkeit beachtet, die verschiedenen Grössen:

$$D_{i,\mu\nu} = D \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}, \quad R_{1\dots 7} = R \begin{bmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_7 \\ \mu_1 \dots \mu_7 \\ \nu_1 \dots \nu_7 \end{bmatrix}$$

eindeutig den Koeffizienten ternärer Formen mit 1 bzw. 7 Variablenreihen zuzuordnen <sup>1)</sup>.

Abgesehen davon, dass eine solche Abbildung sich für die Grössen  $R$  nicht besonders einfach gestaltet, erheben sich weitere Schwierigkeiten, indem die Grössen  $R$  nicht algebraisch-unabhängig sind (vgl. § 9), und die Zuordnung deshalb nicht auf Koeffizienten *allgemeiner* Formen bezogen werden kann.

Diese Unannehmlichkeiten lassen sich beseitigen, wenn man folgendes berücksichtigt: nach § 9, Schlussbemerkung, können die ersten 6 Parametertripel der  $R$ -Funktionen willkürlich gewählt werden. Die Zahl 2 hat die Eigenschaft, dass es eben 6 Tripel von ganzen, nicht-negativen Zahlen gibt, deren Summe 2 beträgt. Es sind dies die Tripel:

$$(200) \quad (020) \quad (002) \quad (011) \quad (101) \quad (110) \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

die wir jetzt der Reihe nach mit  $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1) \dots (\lambda_6 \mu_6 \nu_6)$  identifizieren, und weiterhin durch die Indizes 1...6 andeuten wollen. Eine solche Wahl der Tripel 1...6 genügt der am Schluss des § 9 gestellten Forderung, dass  $G_{1\dots 6} \equiv / \equiv 0$  sei.

Sodann bekommt die  $R$ -Funktion die spezielle Gestalt:

$$T_{\lambda,\mu\nu} = R \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & \nu \end{bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Gemäss Satz 4 ist  $T_{\lambda,\mu\nu}$  eine von 7 Parametertripeln abhängige  $P$ -Funktion. Weiter kann man behaupten:

<sup>1)</sup> Vgl. diese Proceedings 32 (21. Dec. 1929) und 33 (25. Januar 1930).

Satz 5. Die Funktion  $T_{\lambda\mu\nu}$  ist eine  $P$ -Funktion, deren Transformationsgleichung von einem einzigen Parametertripel bestimmt wird:

$$T_{\lambda\mu\nu} = T \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} \sim u^\lambda v^\mu w^\nu.$$

Beweis. Es sei die Transformationsgleichung der  $T$ -Funktion angeschrieben:

$$(58), (73): T_{\lambda\mu\nu} = \sum_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} \dots \sum_{(\alpha_6\beta_6\gamma_6)} \sum_{(\alpha\beta\gamma)} \pi \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \dots \left. \dots \pi \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{pmatrix} \pi \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \bar{R} \begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_6 & \alpha \\ \beta_1 \dots \beta_6 & \beta \\ \gamma_1 \dots \gamma_6 & \gamma \end{bmatrix} \right\}. \quad (74)$$

Die Grössen  $\bar{R}$  zur rechten Hand sind Determinanten, die verschwinden, sobald zwei Parametertripel  $(\alpha_i\beta_i\gamma_i)$  identisch sind (vgl. (47)). Ferner ist wegen (58'):

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 2 \quad \alpha_i \geq 0 \quad \beta_i \geq 0 \quad \gamma_i \geq 0 \quad (i=1\dots 6) \quad . \quad (74')$$

d.h. die  $\bar{R}$  sind nur dann von Null verschieden, wenn ihre ersten 6 Parametertripel eine Permutation der Tripel (72) bilden.

Setzen wir noch:

$$\pi \begin{pmatrix} \lambda_i & \mu_i & \nu_i \\ \lambda_k & \mu_k & \nu_k \end{pmatrix} = p_{ik} \quad (i, k = 1\dots 6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

wo  $(\lambda_i\mu_i\nu_i)$  das  $i$ -te Tripel aus (72) andeutet, so lässt sich (74) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu} &= \sum_{(k_1\dots k_6)} \sum_{(\alpha\beta\gamma)} p_{1k_1} \dots p_{6k_6} \pi \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \bar{R} \begin{bmatrix} \lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_6} & \alpha \\ \mu_{k_1} \dots \mu_{k_6} & \beta \\ \nu_{k_1} \dots \nu_{k_6} & \gamma \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{(k_1\dots k_6)} \operatorname{sgn}(k_1\dots k_6) p_{1k_1} \dots p_{6k_6} \cdot \sum_{(\alpha\beta\gamma)} \pi \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \bar{T}_{\alpha\beta\gamma} \\ &\quad (k_\sigma \neq k_\tau \text{ für } \sigma \neq \tau, \quad 1 \leq k \leq 6). \end{aligned}$$

Also gilt:

$$T_{\lambda\mu\nu} = D \sum_{(\alpha\beta\gamma)} \pi \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \bar{T}_{\alpha\beta\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74'')$$

mit:

$$D = | p_{ik} | \quad i, k = 1\dots 6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75')$$

Die Rechnung <sup>1)</sup> ergibt mittels (59), (59'):

<sup>1)</sup> Vgl. die weiterhin mit „A. B.“ zitierte Arbeit: *Ueber eine algebraische Basis*.... Formel (28), in diesen Proceedings, 32, p. 1264.

$$D = \begin{vmatrix} e_{11}^2 & e_{21}^2 & e_{31}^2 & e_{21}e_{31} & e_{31}e_{11} & e_{11}e_{21} \\ e_{12}^2 & e_{22}^2 & e_{32}^2 & e_{22}e_{32} & e_{32}e_{12} & e_{12}e_{22} \\ e_{13}^2 & e_{23}^2 & e_{33}^2 & e_{23}e_{33} & e_{33}e_{13} & e_{13}e_{23} \\ 2e_{12}e_{13} & 2e_{22}e_{23} & 2e_{32}e_{33} & e_{22}e_{33} + e_{23}e_{32} & e_{32}e_{13} + e_{33}e_{12} & e_{12}e_{23} + e_{13}e_{22} \\ 2e_{13}e_{11} & 2e_{23}e_{21} & 2e_{33}e_{31} & e_{23}e_{31} + e_{21}e_{33} & e_{33}e_{11} + e_{31}e_{13} & e_{13}e_{21} + e_{11}e_{23} \\ 2e_{11}e_{12} & 2e_{21}e_{22} & 2e_{31}e_{32} & e_{21}e_{32} + e_{22}e_{31} & e_{31}e_{12} + e_{32}e_{11} & e_{11}e_{22} + e_{12}e_{21} \end{vmatrix} = 1 \quad (75'')$$

und der Satz ist bewiesen.

Die Formel (53) bekommt nun die Gestalt:

$$K = K \{ (T_{\lambda\mu\nu}), (D_{\alpha\beta\gamma}) \} \dots \dots \dots (53')$$

und zwar kann man:

$$\lambda + \mu + \nu \neq 2 \dots \dots \dots (53'')$$

annehmen, da sonst  $T_{\lambda\mu\nu}$  identisch verschwindet. Die Funktionen  $T_{\lambda\mu\nu}$  sind jetzt algebraisch-unabhängig, was schon daraus hervorgeht, dass  $T_{\lambda\mu\nu}$  die Ableitung  $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$  enthält, die in keiner anderen Funktion  $T_{\lambda'\mu'\nu'}$  auftritt. Somit gilt folgender Reduktionssatz für Invarianten  $K$ , wobei wir uns zunächst auf Polynome der Grössen  $D$  und  $T$  beschränken:

**Satz 6.** Die Differentialinvarianten  $K$  sind Drehungsinvarianten des abzählbar-unendlichen ternären Formensystems:

$$\left. \begin{aligned} f_m &= (d\xi)^m \quad (m \geq 0) \\ g_n &= (t\xi)^n \quad (n \geq 0, \quad n \neq 2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (76)$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} D_{\alpha\beta\gamma} &= d_{\underbrace{1\dots 1}_{\alpha}} \underbrace{2\dots 2}_{\beta} \underbrace{3\dots 3}_{\gamma} \text{ mal.} \\ T_{\lambda\mu\nu} &= t_{\underbrace{1\dots 1}_{\lambda}} \underbrace{2\dots 2}_{\mu} \underbrace{3\dots 3}_{\nu} \text{ mal.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (76')$$

**Beispiel.** Die Grundformen  $f_0, g_0$  sind selbst Invarianten. Während  $f_0$  die triviale Differentialinvariante  $D_{000} = \eta$  gibt, leitet sich aus  $g_0$  nachstehende Invariante ab:

$$T_{000} = \begin{vmatrix} 0 & 2D_{011} - 2D_{011} & D_{002} - D_{020} & -D_{110} & D_{101} & 0 \\ -2D_{101} & 0 & 2D_{101} & -D_{110} & D_{200} - D_{002} & -D_{011} & 0 \\ 2D_{110} - 2D_{110} & 0 & -D_{101} & D_{011} & D_{020} - D_{200} & 0 \\ D_{300} & D_{120} & D_{102} & D_{111} & D_{201} & D_{210} & D_{100} \\ D_{210} & D_{030} & D_{012} & D_{021} & D_{111} & D_{120} & D_{010} \\ D_{201} & D_{021} & D_{003} & D_{012} & D_{102} & D_{111} & D_{001} \\ \dot{D}_{200} & \dot{D}_{020} & \dot{D}_{002} & \dot{D}_{011} & \dot{D}_{101} & \dot{D}_{110} & \dot{D}_{000} \end{vmatrix} \quad (77)$$

Sie stellt zugleich die einfachste Differentialinvariante erster Ordnung bzgl.  $t$  der verallgemeinerten GALILEI-NEWTON-Gruppe dar. Ueber das Verhalten der übrigen (unendlich vielen) Differentialinvarianten  $K$  zu  $T_{000}$  werden nachher einige Sätze bewiesen.

Es möge noch die Frage erörtert werden, ob die in  $D_{i\mu\nu}$  und  $\dot{D}_{i\mu\nu}$  ganzrationalen Invarianten sich auch als Polynome von Grössen  $D_{i\mu\nu}$  und  $T_{\lambda\mu\nu}$  darstellen lassen. Ein einfaches Beispiel lehrt, dass dem im Allgemeinen nicht so ist.

Zunächst lässt sich jede in  $D_{\lambda\mu\nu}$  und  $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$  ganz-rationale Invariante:

$$F = F\{(D_{\lambda\mu\nu}), (\dot{D}_{\lambda\mu\nu})\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

durch Multiplikation mit einer genügend hohen Potenz von  $G_{1\dots 6}$  als Polynom von Grössen  $D_{\lambda\mu\nu}$  und  $T_{i\mu\nu}$  darstellen. Man hat ja:

$$(46), (47), (73): \quad T_{\lambda\mu\nu} = G_{2\dots 6\tau} \dot{D}_{200} - G_{13\dots 6\tau} \dot{D}_{020} + G_{124\dots 6\tau} \dot{D}_{002} - \\ - G_{1\dots 356\tau} \dot{D}_{011} + G_{1\dots 46\tau} \dot{D}_{101} - G_{1\dots 5\tau} \dot{D}_{110} + \left. \begin{array}{l} \\ + G_{1\dots 6} \dot{D}_{\lambda\mu\nu} \end{array} \right\} (73')$$

wo  $\tau$  das Zahlentripel  $(\lambda\mu\nu)$  andeutet. Werden die Grössen  $\dot{D}_{i\mu\nu}$  ( $\lambda+\mu+\nu \neq 2$ ) mittels (73') aus (78) eliminiert, so müssen sich die Grössen  $\dot{D}_{200} \dots \dot{D}_{110}$  wegen (53') wegheben, und man bekommt:

$$G_{1\dots 6}^{\eta} F\{(D_{\lambda\mu\nu}), (\dot{D}_{\lambda\mu\nu})\} = F'\{(D_{\lambda\mu\nu}), (T_{\lambda\mu\nu})\} \quad . \quad . \quad . \quad (78')$$

wo  $F'$  wieder ein Polynom ist.

$G_{1\dots 6}$  ist eine Differentialinvariante nullter Ordnung bzgl.  $t$ , wie aus ähnlichen Betrachtungen, wie oben über die Funktion  $T_{i\mu\nu}$  angestellt, hervorgeht (vgl. der Beweis des Satzes 5). Also folgt in (78') die Invarianz von  $F'(D, T)$  aus derjenigen von  $F(D, \dot{D})$  und umgekehrt.

Setzt man überdies voraus, dass  $F$  homogen vom Grade  $\eta$  bzgl. der Variablen  $\dot{D}_{i\mu\nu}$  ist und keine der Ableitungen  $\dot{D}_{200} \dots \dot{D}_{110}$  explizite enthält, so gilt sogar:

$$G_{1\dots 6}^{\eta} F\{(D_{\lambda\mu\nu}), (\dot{D}_{\lambda\mu\nu})\} = F\{(D_{\lambda\mu\nu}), (T_{\lambda\mu\nu})\} \quad . \quad . \quad . \quad (78'')$$

und es kann nicht immer  $\eta = 0$  sein.

Ein Beispiel hierzu liefert die Klasse der Invarianten:

$$L_{\tau_1\dots\tau_4} = \frac{\partial (I_{\tau_1} \dots I_{\tau_4})}{\partial (t \, x_1 \, x_2 \, x_3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

die uns noch später beschäftigen wird. Die  $(\tau)$  sind Zahlenindizes, die  $(I_{\tau})$  willkürlich aus der Menge  $(I_0 = \varphi, I_1, I_2 \dots)$  herausgegriffene Invarianten nullter Ordnung bzgl.  $t$  (vgl. § 4). Es leuchtet ein dass jedes  $L_{\tau_1\dots\tau_4}$  zur Klasse der  $K$ -Invarianten gehört.



Wählt man, wie auf unendlich viele Weisen möglich, die Invarianten  $I_{\tau_1} \dots I_{\tau_4}$  so, dass sie keine Ableitungen  $D_{\lambda\mu\nu}$  zweiter Ordnung enthalten, so enthält  $L_{\tau_1, \dots, \tau_4}$  auch keine der Ableitungen  $\dot{D}_{200} \dots \dot{D}_{110}$ . Ferner ist jedes  $L = L(D, \dot{D})$  eine Linearform der Ableitungen  $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$ . Also sind die Voraussetzungen für (78'') mit  $\eta = 1$  erfüllt, und eine etwaige Reduzibilität des Polynoms  $L$  kann diese Sachlage nicht ändern, denn es müsste sodann die Gleichung (78'') mit  $\eta = 1$  für denjenigen irreduzibeln (und notwendig invarianten) Faktor von  $L$  zutreffen, der die Grössen  $\dot{D}_{\lambda\mu\nu}$  enthielte, w.z.b.w.

### § 13. Ausnahmefälle.

Bisher war die Koeffizientenmatrix der Gleichungen (40):

$$\|C_i(p)\| = \begin{vmatrix} C_1(4) & C_1(5) \dots C_1(m) \\ C_2(4) & C_2(5) \dots C_2(m) \\ C_3(4) & C_3(5) \dots C_3(m) \end{vmatrix} \dots \dots \dots (80)$$

vom dritten Range mit  $m \geq 7$  vorausgesetzt. Es fragt sich ob man neue Differentialinvarianten  $K$  bekommt wenn man diese Voraussetzung fallen lässt. Wir wollen gleich das Resultat vorwegnehmen: durch den Reduktionssatz 6 werden sämtliche Invarianten  $K$  (bis auf geeignete Potenzen von  $G_{1\dots 6}$ ) dargestellt.

Zunächst werden wir die Bedingungen dafür angeben, dass die Matrix (80) zweiten Ranges mit  $m \geq 6$  ist. Es müssen alle aus (80) zu bildenden Determinanten  $E_{ikl}$  (vgl. (43)) verschwinden, d.h. wegen Hilfsatz 2 alle Determinanten  $G_{123ikl}$  mit  $i, k, l = 4 \dots m$  (der Faktor  $\nabla_{123}$  verschwindet nie identisch, vgl. § 7).

Am Beispiel der Gleichung  $G_{12\dots 6} = 0$  möge die Rechnung kurz skizziert werden. Dabei wird ausser dieser Gleichung nichts weiteres über die (durchweg verschiedenen) Parametertripel  $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1) \dots (\lambda_6 \mu_6 \nu_6)$  vorausgesetzt. Das Verfahren ist wesentlich dasselbe, wie in § 7 bei der Diskussion von  $\nabla_{123}$ .

Es sei die aus den  $i_1 \dots i_{\sigma}$ -ten Zeilen und  $k_1 \dots k_{\sigma}$ -ten Spalten von (46) gebildete Determinante mit  $g_{i_1 \dots i_{\sigma}}^{k_1 \dots k_{\sigma}}$  bezeichnet. Unter den höchstens 54 Ableitungen welche eine Determinante  $g_{i_1 \dots i_{\sigma}}^{k_1 \dots k_{\sigma}}$  ( $\sigma \leq 6$ ) enthalten kann, gibt es immer Grössen  $D_{\lambda\mu\nu}$  die von allen übrigen  $D_{\lambda'\mu'\nu'}$  verschieden sind, wie aus einer Ordnung bzgl. der Indizes  $(\lambda \mu \nu)$ , d.h. durch Bestimmung eines „Maximalelementes“, folgt (vgl. § 7). Freilich können jetzt (bei vorgeschriebener Ordnung der Ableitungen  $D$ ) mehrere in  $g_{i_1 \dots i_{\sigma}}^{k_1 \dots k_{\sigma}}$  auftretenden Grössen  $D_{\lambda\mu\nu}$  dem Maximalelement gleich sein. Man hilft sich da so, dass man verschiedene Ordnungstypen der Ableitungen  $D_{\lambda\mu\nu}$  einführt; z.B. wird eine „ $(\lambda \mu \nu)$ -Ordnung“ definiert durch die Feststellung:

„Es ist  $D_{\lambda\mu\nu} > D_{\lambda'\mu'\nu'}$ , falls eine der Bedingungen:

- 1°.  $\lambda > \lambda'$
- 2°.  $\lambda = \lambda' \quad \mu > \mu'$
- 3°.  $\lambda = \lambda' \quad \mu = \mu' \quad \nu > \nu'$

zutrifft“.

Aehnlich lässt sich eine  $(\mu\lambda\nu)$ -Ordnung bestimmen u.s.f.

Von den 6 auf diese Weise möglichen Ordnungstypen gibt es alsdann wenigstens einen, für welchen eine gegebene Determinante  $g_{i_1 \dots i_7}^{k_1 \dots k_7}$  das zugehörige Maximalelement linear enthält. Verschwindet die Determinante  $G_{1\dots 6} = g_{1\dots 6}^{1\dots 6}$  identisch, so muss also eine Reihe ihrer Minoren der Gradzahlen 5, 4, ... ebenfalls verschwinden.

Deze Ueberlegung führt auf die folgenden Sätze, die eine übersichtliche Diskussion der Gleichung  $G_{1\dots 6} \equiv 0$  gestatten, und die durch Auswahl der verschiedenen in Betracht kommenden Möglichkeiten leicht bewiesen werden. Es werden dabei Lösungen, die durch einfaches Umstellen der Parameter  $(\lambda\mu\nu)$  oder der Parametertripel  $(\lambda_1\mu_1\nu_1) \dots (\lambda_6\mu_6\nu_6)$  aus einander hervorgehen nicht besonders erwähnt.

*Hilfssatz 8.* Für das identische Verschwinden von  $g_{123}^{123} = \Gamma_{123}$  ist die Erfüllung einer der folgenden Bedingungen notwendig:

- 1°.  $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1) = (000)$
- 2°.  $(\mu_i \nu_i) = (00) \quad (i = 1, 2, 3)$
- 3°.  $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1) = (100) \quad (\lambda_2 \mu_2 \nu_2) = (010) \quad (\lambda_3 \mu_3 \nu_3) = (001)$
- 4°.  $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1) = (200) \quad (\lambda_2 \mu_2 \nu_2) = (020) \quad (\lambda_3 \mu_3 \nu_3) = (002)$

Jede dieser Forderungen ist auch hinreichend.

*Hilfssatz 9.* Für das identische Verschwinden von  $g_{1\dots 4}^{1\dots 4}$  ist die Erfüllung einer der folgenden Bedingungen notwendig:

- 1°.  $(\mu_i \nu_i) = (00) \quad (i = 1 \dots 4)$
- 2°.  $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1) = (100) \quad (\lambda_2 \mu_2 \nu_2) = (010) \quad (\lambda_3 \mu_3 \nu_3) = (001) \quad (\lambda_4 \mu_4 \nu_4) = (000)$
- 3°.  $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1) = (200) \quad (\lambda_2 \mu_2 \nu_2) = (020) \quad (\lambda_3 \mu_3 \nu_3) = (002) \quad (\lambda_4 \mu_4 \nu_4) = (000)$

Jede dieser Forderungen ist auch hinreichend.

*Hilfssatz 10.* Für das identische Verschwinden von  $g_{1\dots 5}^{1\dots 5}$  ist notwendig und hinreichend:

$$(\mu_i \nu_i) = (00) \quad (i = 1 \dots 5)$$

*Hilfssatz 11.* Für das identische Verschwinden von  $g_{1\dots 6}^{1\dots 6} = G_{1\dots 6}$  ist notwendig und hinreichend:

$$(\mu_i \nu_i) = (00) \quad (i = 1 \dots 6)$$

Sodann ist folgender Satz einleuchtend:

Satz 7. Damit die Matrix (80) mit  $m \geq 6$  vom zweiten Range sei, ist notwendig und hinreichend:

$$(\mu_i \nu_i) = (00) \quad (i = 1 \dots m)$$

Es lassen sich jetzt die übrigen Möglichkeiten [ $m < 6$ , (80) eine Matrix ersten Ranges] schnell erledigen. Sollte z. B. (80) mit  $m \geq 6$  eine Matrix ersten Ranges sein, so müsste auch:

$$\begin{vmatrix} C_1(4) & C_1(5) \\ C_2(4) & C_2(5) \\ C_3(4) & C_3(5) \end{vmatrix}$$

höchstens vom Range 1 sein, d. h. die Matrix:

$$\begin{vmatrix} C_1(4) & C_1(5) & C_1(6) \\ C_2(4) & C_2(5) & C_2(6) \\ C_3(4) & C_3(5) & C_3(6) \end{vmatrix}$$

wäre höchstens vom Range 2 mit *willkürlichem* Parametertripel  $(\lambda_6, \mu_6, \nu_6)$ ; das ist aber wegen Satz 7 unmöglich. Aus einer ähnlichen Bemerkung geht hervor, dass auch für  $m = 4, 5$  keine Differentialinvarianten  $K$  bestehen.

Man kann sich also auf die in Satz 7 betrachteten Möglichkeiten beschränken. Demzufolge sind alle Zahlen  $(\mu_i \nu_i)$  gleich Null zu setzen und es müssen in (80) sämtliche Grössen  $C_1(p)$  verschwinden. Somit ist die erste der Differentialgleichungen (40) identisch erfüllt und es bleiben die Gleichungen übrig:

$$\sum_{p=4}^m \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_p} C_2(p) = 0, \quad \sum_{p=4}^m \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_p} C_3(p) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (40')$$

Der Hilfssatz 1 kommt zur Anwendung und ergibt als allgemeines Integral von (40'):

$$\Phi = \Psi\{H'_q, (D_{\alpha, \beta \gamma})\} \quad (6 \leq q \leq m) \quad . \quad . \quad . \quad (52')$$

wo die Grössen  $H'_q$  bestimmt werden durch:

$$H'_q = \begin{vmatrix} \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_q \\ C_2(4) & C_2(5) & C_2(q) \\ C_3(4) & C_3(5) & C_3(q) \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45')$$

indem wir

$$\begin{vmatrix} C_2(4) & C_2(5) \\ C_3(4) & C_3(5) \end{vmatrix} \equiv \equiv 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51')$$

annehmen.

Man wähle ein im übrigen willkürliches Parametertripel  $(\lambda_r, \mu_r, \nu_r)$  ( $r > m$ ) derart dass  $C_1(r) \equiv \equiv 0$ ; wegen:

$$C_1(4) = C_1(5) = C_1(q) = 0$$

ist sodann:

$$H'_q = \frac{1}{C_1(r)} \begin{vmatrix} \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_q & \Delta_r \\ C_1(4) & C_1(5) & C_1(q) & C_1(r) \\ C_2(4) & C_2(5) & C_2(q) & C_2(r) \\ C_3(4) & C_3(5) & C_3(q) & C_3(r) \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (45'')$$

und es hat wegen (45), (45''), (52') die Differentialinvariante  $K = \Phi$  die Gestalt (53), d.h. es gilt für sie der Reduktionssatz 6, w.z.b.w.

#### § 14. Mehrere Skalaren.

Bisher wurden Differentialinvarianten gebildet aus den Ableitungen einer einzigen skalaren Grösse  $\varphi$ . Es ändert sich das Ergebnis nur unwesentlich, wenn mehrere Skalaren  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  in Betracht gezogen werden.

Die verschiedenen Funktionen  $D_{i,\mu\nu}$ ,  $\bar{D}_{i,\mu\nu}$ ,  $\nabla_{ikl} \dots T_{i,\mu\nu}$  kann man sämtlich beibehalten, wenn man nur den neuen Verhältnissen Rechnung trägt. Es kann dies so geschehen, dass man für die einzelnen Ableitungen schreibt:

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} \varphi_\sigma}{\partial x_1^\lambda \partial x_2^\mu \partial x_3^\nu} = D_{\lambda\mu\nu,\sigma} \quad , \quad \frac{\partial D_{\lambda\mu\nu,\sigma}}{\partial t} = \bar{D}_{\lambda\mu\nu,\sigma} \quad (\sigma = 1 \dots n) \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

und in den Determinanten  $\nabla_{ikl}$ ,  $\Gamma_{ikl}$ ,  $G_{1\dots 6}$ ,  $R_{1\dots 7}$ , deren Elemente Linearformen dieser Ableitungen sind, jeder Spalte einen Zahlenindex  $\sigma$  zuordnet, derart, dass die Ableitungen einer einzelnen Spalte sich auf denselben Skalar  $\varphi_\sigma$  beziehen.

Wir schreiben:

$$\nabla \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial [D_{\lambda_1\mu_1\nu_1,\sigma_1} \dots D_{\lambda_3\mu_3\nu_3,\sigma_3}]}{\partial (x_1 x_2 x_3)} \text{ u.s.f.} \quad . \quad . \quad (24')$$

und es bleiben die Rechnungen der §§ 1—13 fast ungeändert. Man hat nur bei der Definition der  $T$ -Funktion zu berücksichtigen, dass die Ableitungen der ersten 6 Spalten auf den gleichen Skalar (z.B.  $\varphi_1$ ) bezogen werden müssen, also wie folgt:

$$T_{\lambda\mu\nu,\sigma} = R \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & \nu \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sigma \end{bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73')$$

Sodann sei noch folgende Verallgemeinerung von Satz 6 angeführt:

**Satz 8.** Die aus den Ableitungen von  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  gebildeten, zur Gruppe  $\mathfrak{G}_2$  gehörigen Differentialinvarianten nullter und erster Ordnung

bzgl.  $t$  sind mit den Drehungsinvarianten des abzählbar-unendlichen ternären Formensystems:

$$\left. \begin{aligned} f_m(\sigma) &= (d^{(\sigma)} \xi)^m [m \geq 0, 1 \leq \sigma \leq \omega] \\ g_n(\sigma) &= (t^{(\sigma)} \xi)^n [n \geq 0, 1 \leq \sigma \leq \omega, (n, \sigma) \neq (2, 1)] \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

identisch, wo:

$$\left. \begin{aligned} D_{\lambda, \mu, \nu, \sigma} &= d_{\underbrace{1 \dots 1}_{\lambda}, \underbrace{2 \dots 2}_{\mu}, \underbrace{3 \dots 3}_{\nu}}^{(\sigma)} \text{ mal.} \\ T_{\lambda, \mu, \nu, \sigma} &= t_{\underbrace{1 \dots 1}_{\lambda}, \underbrace{2 \dots 2}_{\mu}, \underbrace{3 \dots 3}_{\nu}}^{(\sigma)} \text{ mal.} \end{aligned} \right\} \quad (81')$$

ist.

### § 15. Algebraische Abhängigkeit.

Die Differentialinvarianten  $I$  und  $K$  sind Drehungsinvarianten ternärer Formen; ihre algebraischen Abhängigkeitsbeziehungen leiten sich aus den Betrachtungen in A. B. ab.

Es mögen sogleich  $\omega$  Skalaren  $\varphi_1 \dots \varphi_\omega$  vorliegen.

Weiterhin sei die Bezeichnung „algebraische Basis“ für eine grösste Menge <sup>1)</sup> von algebraisch-unabhängigen Invarianten auch in denjenigen Fällen beibehalten, wo das System der Grundformen abzählbar ist. Wegen des additiven Charakters der herzustellenden algebraischen Basis (vgl. A. B. § 4) erheben sich im vorliegenden Fall keine Bedenken gegen eine solche Ausdehnung des Basisbegriffs.

Sodann kann man genau wie in A. B. die aus Faktoren erster Art gebildeten Invarianten  $I$  und  $K$  graphisch darstellen. Zu ihnen gehören die fernerhin mit  $I^{(n)}$  bzw.  $K^{(n)}$  bezeichneten, sog. Normalinvarianten. Letztere sind sämtlich von einander algebraisch-unabhängig. Für ihre Konstruktion ist die Anwesenheit je einer linearen und einer quadratischen Form im Grundformensystem erforderlich. Als solche wollen wir die beiden Grundformen  $f_1(1)$  und  $f_2(1)$  aus (81) wählen, womit der Begriff der Normalinvariante eindeutig bestimmt ist. Den Ausführungen in A. B. § 4, zufolge gilt alsdann:

**Satz 9.** Die Normalinvarianten der Formen (81) bilden eine algebraische Basis der Differentialinvarianten  $I$  und  $K$ .

Bezeichnen  $\mathfrak{B}_I$  und  $\mathfrak{B}_I + \mathfrak{B}_K$  Basen der Invariantenmengen ( $I$ ) bzw. ( $I, K$ ), so lässt sich schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_I + \mathfrak{B}_K &= \sum_{\substack{m=0, \dots, \infty \\ \sigma=1, \dots, \omega}} \mathfrak{B}'[f_m(\sigma)] + \sum_{\substack{n=0, \dots, \infty \\ \sigma=1, \dots, \omega}} \mathfrak{B}'[g_n(\sigma)] + \mathfrak{B}[f_1(1), f_2(1)] \\ &\quad [(m, \sigma) \neq (1, 1), (m, \sigma) \neq (2, 1), (n, \sigma) \neq (2, 1)] \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

<sup>1)</sup> Da es sich um abzählbare Invariantenmengen handelt, soll dieser Ausdruck bedeuten: „keiner echten Teilmenge von einer Menge algebraisch-unabhängiger Invarianten gleich“.



wo  $\mathfrak{B}'[f]$  bzw.  $\mathfrak{B}'[g]$  die zur Form  $f$  bzw.  $g$  gehörige Menge von Normalinvarianten bedeutet.

Die Mengen  $\mathfrak{B}'$  bilden keine selbständigen Basen, sondern ergänzen eine vorgegebene Basis  $\mathfrak{B}$  zu einer neuen Basis  $\mathfrak{B}_1$ , die einer umfassenderen Formenmenge entspricht (vgl. A. B. (13), (14)). Eine Menge  $\mathfrak{B}'$  stellt also eine Teilmenge einer algebraischen Basis dar. Ich will sie kurzweg als *Teilbasis* bezeichnen, und führe als Beispiel die Teilbasis der Invarianten (79) an. Es gilt:

**Satz 10.** Eine Teilbasis der Invarianten  $L_{\tau_1 \dots \tau_4}$  ist mit der durch (82) bestimmten Teilbasis:

$$\mathfrak{B}'_K = \sum_{\substack{n=0, \dots, \infty \\ \sigma=1, \dots, \sigma}} \mathfrak{B}'[g_n(\sigma)], \quad (n, \sigma) \neq (2, 1) \quad \left\{ \dots \dots (82') \right.$$

algebraisch-äquivalent.

*Beweis.* Zunächst kann man in der Formel (79) drei Invarianten ( $I_{\tau_1} I_{\tau_2} I_{\tau_3}$ ) willkürlich wählen, wegen der Identität:

$$\frac{\partial(I_1 I_2 I_3)}{\partial(x_1 x_2 x_3)} \frac{\partial(I_1 I_2 I_4 I_5)}{\partial(t x_1 x_2 x_3)} + \frac{\partial(I_1 I_2 I_4)}{\partial(x_1 x_2 x_3)} \frac{\partial(I_1 I_2 I_5 I_3)}{\partial(t x_1 x_2 x_3)} + \frac{\partial(I_1 I_2 I_5)}{\partial(x_1 x_2 x_3)} \frac{\partial(I_1 I_2 I_3 I_4)}{\partial(t x_1 x_2 x_3)} = 0 \quad \left\{ \dots (83) \right.$$

Es sei also:

$$\Delta(I) = \frac{\partial(I_0 I_1 I_2 I)}{\partial(t x_1 x_2 x_3)} \dots \dots \dots (84)$$

mit:

$$I_0 = \varphi_1, \quad I_1 = \sum_i \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right)^2, \quad I_2 = \sum_{i, k} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i \partial x_k} \dots \dots (85)$$

Letztere Invarianten genügen der Bedingung:

$$\frac{\partial(I_0 I_1 I_2)}{\partial(x_1 x_2 x_3)} \neq 0 \quad \dots \dots \dots (85')$$

und es ist jedes  $L$  von Invarianten  $I$  und  $\Delta$  algebraisch-abhängig.

Sodann ist jedes  $I$  eine algebraische Funktion von Normalinvarianten  $I^{(n)}$ , d.h. jedes  $L$  ist eine Linearform von Grössen:

$$\Delta^{(n)} = \frac{\partial(I_0 I_1 I_2 I^{(n)})}{\partial(t x_1 x_2 x_3)} \dots \dots \dots (84')$$

mit Koeffizienten, die Invarianten  $I$  sind. Eine Teilbasis der Invarianten ( $L$ ) ist also mit einer Teilbasis der Invarianten ( $\Delta^{(n)}$ ) äquivalent.

Jetzt betrachte man die Formen  $f_m(\sigma)$ , für welche:

$$(m, \sigma) \neq (0, 1), (m, \sigma) \neq (1, 1), (m, \sigma) \neq (2, 1) \dots \quad (86)$$

ist. Zu jeder derartigen Form mit:

$$M = \frac{1}{2}(m+1)(m+2) \dots \quad (87)$$

Koeffizienten gehören  $M$  Normalinvarianten  $I^{(n)}$  und ebensoviele Invarianten  $A^{(n)}$ . Sie lassen sich wie folgt darstellen:

$$A_{\alpha\beta\gamma, \sigma}^{(n)} = \frac{\partial (I_0 I_1 I_2 I_{\alpha\beta\gamma, \sigma}^{(n)})}{\partial (t x_1 x_2 x_3)} \dots \quad (88)$$

$$I_{\alpha\beta\gamma, \sigma}^{(n)} = x_{i_1} \dots x_{i_\alpha} y_{i_{\alpha+1}} \dots y_{i_{\alpha+\beta}} z_{i_{\alpha+\beta+1}} \dots z_{i_m} d_{i_1, \dots, i_m}^{(\sigma)} \left\{ \begin{array}{l} (a + \beta + \gamma = m, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0) \end{array} \right. \quad (88')$$

Dabei wird über die Indizes  $i$  summiert, und die Grössen  $x, y, z$  haben folgende Bedeutung:

$$x_i = d_i^{(1)} \quad y = d_{ik}^{(1)} d_k^{(1)} \quad z_i = d_{ik}^{(1)} d_{kl}^{(1)} d_l^{(1)} \dots \quad (89)$$

wo wieder über die mehrfachen Indizes  $k, l$  summiert wird und die Grössen  $d$  durch (81') bestimmt werden (vgl. A.B. § 5).

Für die  $M$  zur Form  $g_m(\sigma)$  gehörigen Normalinvarianten  $K^{(n)}$  gilt die analoge Formel:

$$K_{\alpha\beta\gamma, \sigma}^{(n)} = x_{i_1} \dots x_{i_\alpha} y_{i_{\alpha+1}} \dots y_{i_{\alpha+\beta}} z_{i_{\alpha+\beta+1}} \dots z_{i_m} t_{i_1, \dots, i_m}^{(\sigma)} \dots \quad (88'')$$

Jede Invariante  $A_{\alpha\beta\gamma, \sigma}^{(n)}$  ist eine Linearform von Grössen  $\dot{D}_{\lambda\mu\nu, \tau}$  mit:

$$1^\circ. \quad \lambda + \mu + \nu = 0, \quad \tau = 1$$

$$2^\circ. \quad \lambda + \mu + \nu = 1, \quad \tau = 1$$

$$3^\circ. \quad \lambda + \mu + \nu = m, \quad \tau = \sigma$$

also auch von den entsprechenden Grössen  $T_{\lambda\mu\nu, \tau}$ . Alsdann ergibt sich aus (88), (88'), (88''):

$$A_{\alpha\beta\gamma, \sigma}^{(n)} = -G_{1\dots 6}^{-1} \frac{\partial (I_0 I_1 I_2)}{\partial (x_1 x_2 x_3)} K_{\alpha\beta\gamma, \sigma}^{(n)} + \sum_{(\lambda\mu\nu)} c_{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu, 1} \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu + \nu = 0, 1) \end{array} \right. \quad (90)$$

und die  $M$  Invarianten  $A_{\alpha\beta\gamma, \sigma}^{(n)}$  sind algebraisch-unabhängig, d.h. sie bilden eine zu  $\mathfrak{B}'[g_m(\sigma)]$  äquivalente Teilbasis.

Der Formel (82) gemäss wäre dann:

$$\mathfrak{B}'[A_{\alpha\beta\gamma, \sigma}^{(n)}] \sim \mathfrak{B}'[g_m(\sigma)] \quad (a + \beta + \gamma = m) \dots \quad (82'')$$

zu schreiben für alle Wertepaare  $(m, \sigma)$  die (86) genügen, und es bliebe noch zu beweisen übrig:

$$\mathfrak{B}'[A^{(n)}] \sim \mathfrak{B}'[g_0(1)] + \mathfrak{B}'[g_1(1)] \dots \quad (82''')$$

wenn die Teilbasis zur Linken bezogen wird auf diejenige Invarianten  $\Lambda^{(n)}$  welche den Normalinvarianten  $I^{(n)}$  der Formen  $f_0(1)$ ,  $f_1(1)$  und  $f_2(1)$  entsprechen. Wegen (84'), (85) kommen hier die Formen  $f_0(1)$ ,  $f_1(1)$  nicht weiter in Betracht, indem die zugehörigen Invarianten  $\Lambda^{(n)}$  identisch verschwinden. Es steht also in (82'') links eine Teilbasis folgender 4 Invarianten:

$$A_p = \frac{\partial(I_0 I_1 I_2 I_p)}{\partial(t x_1 x_2 x_3)} \quad (p=3, \dots, 6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

wo die  $I_p$  ( $p=1 \dots 6$ ) im Einklang mit (85) die Normalinvarianten der Formen  $f_1(1)$ ,  $f_2(1)$  sind vom Kettengewichte  $p+1$  (vgl. das angeführte Beispiel in A. B. § 4).

Auf der rechten Seite von (82'') stehen ebenfalls 4 Invarianten, nl. die 4 Normalinvarianten  $K^{(n)}$ , die unabhängige Linearformen der 4 Grössen

$$T_{000,1} \quad T_{100,1} \quad T_{010,1} \quad T_{001,1}$$

sind. D. h. für (82'') genügt es nachzuweisen dass:

$$\frac{\partial(A_3, \dots, A_6)}{\partial(T_{000,1}, \dots, T_{001,1})} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

ist, was die Rechnung tatsächlich bestätigt.

Man bekommt:

$$\frac{\partial(A_3, \dots, A_6)}{\partial(T_{000,1}, \dots, T_{001,1})} = G_{1\dots 6}^{-4} \frac{\partial(A_3, \dots, A_6)}{\partial(\bar{D}_{000,1}, \dots, \bar{D}_{001,1})}$$

und hier lässt sich die Funktionaldeterminante rechts in Faktoren zerlegen mittels eines SYLVESTER'schen Satzes über geränderte Determinanten<sup>1)</sup>. Man erkennt leicht, dass diese Faktoren nicht identisch verschwinden können, w. z. b. w.

Es erübrigt sich noch die analytischen Abhängigkeitsbeziehungen der Differentialinvarianten  $I$  und  $K$  zu studieren, nachdem die algebraischen Beziehungen erörtert sind. D. h. wir müssen noch ein „wesentliches System“ von Invarianten  $I$  bzw.  $K$  aufstellen. Schon jetzt können wir gemäss Satz 10 behaupten:

**Satz 11.** Ein wesentliches System der Differentialinvarianten  $(I, L)$  ist mit einem wesentlichen System der Invarianten  $(I, K)$  identisch.

<sup>1)</sup> Vgl. z.B. R. FRICKE, Lehrbuch der Algebra, I, p. 68. Auch die Hilfssätze 2 u. 3 des § 9 sind Spezialfälle jenes SYLVESTER'schen Satzes.

**Mathematics.** — *Adjustment of  $N$  Points (in  $n$ -dimensional Space) to the best linear  $(n-1)$ -dimensional Space.* II. By Prof. M. J. VAN UVEN. (Communicated by Prof. A. A. NIJLAND).

(Communicated at the meeting of March 29, 1930)

We may now calculate  $M(\Delta C_{ij} \Delta C_{kl})$ .

$$\begin{aligned} M(\Delta C_{ij} \Delta C_{kl}) &= M\left(\sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{ij,\lambda\mu} \Delta c_{\lambda\mu} \cdot \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{kl,\rho\sigma} \Delta c_{\rho\sigma}\right) = \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} M(\Delta c_{\lambda\mu} \Delta c_{\rho\sigma}), \end{aligned}$$

or, by (60'),

$$\begin{aligned} M(\Delta C_{ij} \Delta C_{kl}) &= \frac{\varphi_0}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} (c_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} + c_{\mu\sigma} a_{\lambda\rho} + \\ &\quad + c_{\lambda\sigma} a_{\rho\mu} + c_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma}) \\ &\quad + \frac{2\varphi_0^2}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} (a_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} + a_{\lambda\sigma} a_{\rho\mu}) \\ &\quad + \frac{4\varphi_0^2}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} a_{\lambda\mu} a_{\rho\sigma} \\ &\quad - \frac{4\varphi_0^2}{(N-n)UC} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} (a_{\lambda\mu} \sum_{\xi} \sum_{\eta} C_{\xi\eta} a_{\xi\sigma} a_{\rho\eta} + \\ &\quad + a_{\rho\sigma} \sum_{\xi} \sum_{\eta} C_{\xi\eta} a_{\xi\mu} a_{\lambda\eta}) \end{aligned} \quad (61)$$

Putting:

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} c_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma}, & P_2 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} c_{\mu\sigma} a_{\lambda\rho}, \\ P_3 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} c_{\lambda\sigma} a_{\rho\mu}, & P_4 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} c_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma}, \\ & & P &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\ Q_1 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} a_{\rho\lambda} a_{\mu\sigma}, & Q_2 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} a_{\lambda\sigma} a_{\rho\mu}, \\ & & Q &= Q_1 + Q_2 \\ R &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} a_{\lambda\mu} a_{\rho\sigma} \\ S_1 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\xi} \sum_{\eta} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} C_{\xi\eta} a_{\lambda\mu} a_{\xi\sigma} a_{\rho\eta}, \\ & & S_2 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\xi} \sum_{\eta} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} C_{\xi\eta} a_{\rho\sigma} a_{\xi\mu} a_{\lambda\eta}, & S &= S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (62)$$

we may write (61) in the abbreviated form:

$$M(\Delta C_{ij} \Delta C_{kl}) = \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ P + 2\varphi_0 \left( Q + 2R - \frac{2}{UC} S \right) \right\}. \quad (63)$$

Applying the relations (50) and (53), and bearing in mind, that we may not put  $C=0$  before the final result, we find:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \frac{C_{ij} C_{\lambda\mu} - C_{i\mu} C_{\lambda j}}{C} C_{kl,\rho\sigma} c_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} = \\
 &= C_{ij} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \delta_{\rho\mu} C_{kl,\rho\sigma} a_{\mu\sigma} - \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{i\mu} \delta_{\rho j} C_{kl,\rho\sigma} a_{\mu\sigma} \\
 &= C_{ij} \sum_{\mu} \sum_{\sigma} C_{kl,\mu\sigma} a_{\mu\sigma} - \sum_{\mu} \sum_{\sigma} C_{i\mu} C_{kl,j\sigma} a_{\mu\sigma} \\
 &= C_{ij} UC_{kl} - \sum_{\mu} \sum_{\sigma} C_{\mu i} \frac{C_{kl} C_{j\sigma} - C_{jl} C_{k\sigma}}{C} a_{\mu\sigma} \\
 &= C_{ij} UC_{kl} - C_{kl} \sum_{\mu} \sum_{\sigma} \left( \frac{C_{ji} C_{\mu\sigma}}{C} - C_{jl,\mu\sigma} \right) a_{\mu\sigma} + \\
 &\quad + C_{jl} \sum_{\mu} \sum_{\sigma} \left( \frac{C_{ki} C_{\mu\sigma}}{C} - C_{kl,\mu\sigma} \right) a_{\mu\sigma} \\
 &= C_{ij} UC_{kl} - C_{kl} UC \cdot \frac{C_{ji}}{C} + C_{kl} UC_{jl} + C_{jl} UC \frac{C_{kl}}{C} - C_{jl} UC_{ki} \\
 &= U(C_{ij} C_{kl}) - \frac{UC}{C} (C_{jl} C_{kl} - C_{jl} C_{ki}) - U(C_{jl} C_{ki}) + C_{kl} UC_{jl} \\
 &= U(C_{jl} C_{kl} - C_{jl} C_{ki}) - UC \cdot C_{ji,kl} + C_{ik} UC_{lj} \\
 &= U(C \cdot C_{ji,kl}) - UC \cdot C_{ji,kl} + C_{ik} UC_{lj} \\
 &= C UC_{ji,kl} + C_{ik} UC_{lj}
 \end{aligned}$$

or, since  $C=0$ ,

$$P_1 = C_{ik} UC_{lj} . . . . . (64_1)$$

$$P_2 = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} c_{\mu\sigma} a_{\lambda\rho}.$$

By interchanging  $\lambda$  and  $\mu$  on the one hand,  $\rho$  and  $\sigma$  on the other hand, we obtain:

$$P_2 = \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} \sum_{\rho} C_{ij,\mu\lambda} C_{kl,\sigma\rho} c_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ji,\lambda\mu} C_{lk,\rho\sigma} c_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma}.$$

Comparing this expression with that of  $P_1$ , we observe, that  $P_2$  results from  $P_1$  only by interchanging  $i$  and  $j$  on the one hand,  $k$  and  $l$  on the other hand.

So we find for  $P_2$ :

$$P_2 = C_{jl} UC_{ki} = C_{lj} UC_{ik} . . . . . (64_2)$$

$$P_3 = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} c_{\lambda\sigma} a_{\rho\mu}$$



By interchanging  $\varrho$  and  $\sigma$  we obtain:

$$P_3 = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\sigma\rho} c_{\lambda\rho} a_{\sigma\mu} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{lk,\rho\sigma} c_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma}.$$

Comparing this expression with that of  $P_1$ , it appears, that only  $k$  and  $l$  are interchanged, so that we find:

$$P_3 = C_{il} UC_{kj} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64_3)$$

Likewise:

$$P_4 = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} c_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma} = \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\mu\lambda} C_{kl,\rho\sigma} c_{\rho\lambda} a_{\mu\sigma} = \\ = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{jl,\lambda\mu} C_{kl,\rho\sigma} c_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma}.$$

So  $P_4$  derives from  $P_1$  by interchanging  $i$  and  $j$ , whence:

$$P_4 = C_{jk} UC_{li} = C_{kj} UC_{il} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64_4)$$

Summing up these results, we obtain:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = C_{ik} UC_{lj} + C_{lj} UC_{ik} + C_{il} UC_{kj} + C_{kj} UC_{il},$$

or

$$P = U(C_{il} C_{kj} + C_{ik} C_{lj}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

In reducing  $Q_1$  we have:

$$Q_1 = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \frac{C_{ij} C_{\lambda\mu} - C_{i\mu} C_{\lambda j}}{C} \cdot \frac{C_{kl} C_{\rho\sigma} - C_{k\sigma} C_{\rho l}}{C} a_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} \\ = \frac{1}{C^2} (C_{ij} C_{kl} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{\lambda\mu} C_{\tau\rho} a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu} - C_{kl} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{i\mu} C_{\lambda j} C_{\tau\rho} a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu} - \\ - C_{ij} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{\sigma k} C_{l\rho} C_{\lambda\mu} a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu} + \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{i\mu} C_{\lambda j} C_{\sigma k} C_{l\rho} a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu}).$$

Putting:

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{i\mu} C_{\tau\rho} a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu} = Q_{11}, \quad \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{i\mu} C_{\lambda j} C_{\tau\rho} a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu} = Q_{12}, \\ \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{\sigma k} C_{l\rho} C_{\lambda\mu} a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu} = Q_{13}, \quad \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{i\mu} C_{\lambda j} C_{\sigma k} C_{l\rho} a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu} = Q_{14},$$

we may write:

$$Q_1 = \frac{1}{C^2} (C_{ij} C_{kl} Q_{11} - C_{kl} Q_{12} - C_{ij} Q_{13} + Q_{14}) \quad . \quad . \quad (66_1)$$

Now:

$$Q_{11} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} (C_{i\rho} C_{\sigma\mu} - C \cdot C_{i\rho,\sigma\mu}) a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu} = (UC)^2 - C \cdot U^2 C; \quad (67_{11}) \\ Q_{12} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{i\mu} (C_{\sigma j} C_{\lambda\rho} - C \cdot C_{\sigma j,\lambda\rho}) a_{\lambda\rho} a_{\tau\mu} = \\ = UC \cdot \sum_{\mu} \sum_{\sigma} C_{i\mu} C_{\sigma j} a_{\tau\mu} - C \cdot \sum_{\mu} \sum_{\sigma} C_{i\mu} UC_{\sigma j} a_{\tau\mu} \\ = UC \cdot \sum_{\mu} \sum_{\sigma} (C_{ij} C_{\sigma\mu} - C \cdot C_{ij,\sigma\mu}) a_{\tau\mu} - C \cdot \sum_{\mu} \sum_{\sigma} C_{i\mu} UC_{\sigma j} a_{\tau\mu} \\ = (UC)^2 C_{ij} - C \cdot UC \cdot UC_{ij} - C \cdot \sum_{\mu} \sum_{\sigma} C_{i\mu} UC_{\sigma j} a_{\tau\mu}.$$

By interchanging  $i$  and  $j$ ,  $\lambda$  and  $\mu$ ,  $\rho$  and  $\sigma$ , the first member and the first two terms of the second member of this equation remain unaltered, the last term passing into  $-C \cdot \sum_j \sum_\rho C_{j\lambda} UC_{\rho i} a_{\rho\lambda}$ .

If, in this latter expression, we replace  $\lambda$  by  $\sigma$ ,  $\rho$  by  $\mu$ , it becomes  $-C \cdot \sum_{\sigma, \mu} \sum_j C_{j\sigma} UC_{\mu i} a_{j\sigma} = -C \cdot \sum_{\mu, \sigma} \sum_j C_{\sigma j} UC_{i\mu} a_{\sigma\mu}$ . We have therefore, as a second expression for  $Q_{12}$ :

$$Q_{12} = (UC)^2 C_{ij} - C \cdot UC \cdot UC_{ij} - C \cdot \sum_{\mu, \sigma} \sum_j C_{\sigma j} UC_{i\mu} a_{\sigma\mu},$$

whence:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \sigma} \sum_j C_{i\mu} UC_{\sigma j} a_{j\mu} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \sigma} \sum_j (C_{i\mu} UC_{\sigma j} + C_{\sigma j} UC_{i\mu}) a_{j\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \sigma} \sum_j U(C_{i\mu} C_{\sigma j}) a_{j\mu} \\ &= \frac{1}{2} U \left\{ \sum_{\sigma, \mu} (C_{ij} C_{\sigma\mu} - C \cdot C_{ij, \sigma\mu}) a_{\sigma\mu} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} U(C_{ij} \cdot UC - C \cdot UC_{ij}) \end{aligned}$$

or

$$\sum_{\mu, \sigma} \sum_j C_{i\mu} UC_{\sigma j} a_{j\mu} = \frac{1}{2} (C_{ij} \cdot U^2 C - C \cdot U^2 C_{ij}) \quad (68)$$

So we find for  $Q_{12}$ :

$$Q_{12} = (UC)^2 C_{ij} - C \cdot UC \cdot UC_{ij} - \frac{1}{2} C \cdot U^2 C \cdot C_{ij} + \frac{1}{2} C^2 \cdot U^2 C_{ij} \quad (67_{12})$$

The expression  $Q_{13}$  derives from  $Q_{12}$  by replacing  $i$  by  $k$ ,  $j$  by  $l$  (and also  $\sigma$  by  $\mu$ ,  $\rho$  by  $\lambda$ ).

So we find for  $Q_{13}$ :

$$Q_{13} = (UC)^2 C_{kl} - C \cdot UC \cdot UC_{kl} - \frac{1}{2} C \cdot U^2 C \cdot C_{kl} + \frac{1}{2} C^2 \cdot U^2 C_{kl} \quad (67_{13})$$

The expression  $Q_{14}$  may be reduced as follows:

$$\begin{aligned} Q_{14} &= \sum_j \sum_{\mu, \rho} \sum_\sigma C_{i\mu} C_{\sigma k} C_{l\rho} C_{\lambda j} a_{\sigma\mu} a_{\lambda\rho} = \\ &= \sum_{\lambda, \mu, \rho} \sum_\sigma \sum_j (C_{ik} C_{\sigma\mu} - C \cdot C_{ik, \sigma\mu}) (C_{lj} C_{\lambda\rho} - C \cdot C_{lj, \lambda\rho}) a_{\sigma\mu} a_{\lambda\rho} \\ &= (C_{ik} UC - C \cdot UC_{ik}) (C_{lj} \cdot UC - C \cdot UC_{lj}), \end{aligned}$$

or

$$Q_{14} = (UC)^2 C_{ik} C_{lj} - C \cdot UC \cdot U(C_{ik} C_{lj}) + C^2 \cdot UC_{ik} \cdot UC_{lj} \quad (67_{14})$$

So the equation (66)<sub>1</sub> may, by (67)<sub>11</sub>, (67)<sub>12</sub>, (67)<sub>13</sub>, (67)<sub>14</sub>, be reduced to

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{C^2} \{ (UC)^2 \cdot C_{ij} C_{kl} - C \cdot U^2 C \cdot C_{ij} C_{kl} - \\ &- (UC)^2 \cdot C_{ij} C_{kl} + C \cdot UC \cdot C_{kl} UC_{ij} + \frac{1}{2} C \cdot U^2 C \cdot C_{ij} C_{kl} - \frac{1}{2} C^2 \cdot C_{kl} U^2 C_{ij} \\ &- (UC)^2 \cdot C_{kl} C_{ij} + C \cdot UC \cdot C_{ij} UC_{kl} + \frac{1}{2} C \cdot U^2 C \cdot C_{kl} C_{ij} - \frac{1}{2} C^2 \cdot C_{ij} U^2 C_{kl} \\ &+ (UC)^2 \cdot C_{ik} C_{lj} - C \cdot UC \cdot U(C_{ik} C_{lj}) + C^2 \cdot UC_{ik} \cdot UC_{lj} \} \\ Q_1 &= \frac{1}{C^2} \{ - (UC)^2 \cdot (C_{ij} C_{kl} - C_{ik} C_{lj}) + C \cdot UC \cdot U(C_{ij} C_{kl} - C_{ik} C_{lj}) + \\ &+ C^2 UC_{ik} \cdot UC_{lj} - \frac{1}{2} C^2 \cdot C_{kl} U^2 C_{ij} - \frac{1}{2} C^2 \cdot C_{ij} U^2 C_{kl} \} \\ &= \frac{1}{C^2} \{ - (UC)^2 \cdot C \cdot C_{ij, lk} + C \cdot UC \cdot U(C \cdot C_{ij, lk}) + C^2 \cdot UC_{ik} \cdot UC_{lj} - \\ &- \frac{1}{2} C^2 \cdot C_{kl} U^2 C_{ij} - \frac{1}{2} C^2 \cdot C_{ij} U^2 C_{kl} \} \end{aligned}$$

or

$$Q_1 = UC \cdot UC_{ij, lk} + UC_{ik} \cdot UC_{lj} - \frac{1}{2} (C_{kl} U^2 C_{ij} + C_{ij} U^2 C_{kl}) \quad (69_1)$$

In the expression (62) for  $Q_2$  we interchange  $\sigma$  and  $\varrho$ , and so obtain:

$$Q_2 = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\sigma} \sum_{\rho} C_{ij,\lambda\mu} C_{kl,\sigma\rho} a_{\lambda\rho} a_{\sigma\mu} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij,\lambda\mu} C_{lk,\rho\sigma} a_{\lambda\rho} a_{\sigma\mu},$$

which expression derives from  $Q_1$  by interchanging  $k$  and  $l$ . So we find:

$$Q_2 = UC \cdot UC_{ij,kl} + UC_{il} \cdot UC_{kj} - \frac{1}{2} (C_{kl} U^2 C_{ij} + C_{ij} U^2 C_{kl}). \quad (69_2)$$

For  $Q$  we find:

$$Q = UC \cdot (UC_{ij,kl} + UC_{ij,lk}) + UC_{il} \cdot UC_{kj} + UC_{lk} \cdot UC_{ij} - \left\{ \begin{array}{l} - C_{kl} U^2 C_{ij} - C_{ij} U^2 C_{kl} \end{array} \right\} \quad (70)$$

The expression (62) for  $R$  may at once be reduced to

$$R = UC_{ij} \cdot UC_{kl} \quad (71)$$

The expression (62) for  $S_1$  may be transformed in the following way:

$$\begin{aligned} S_1 &= UC_{ij} \cdot \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\xi} \sum_{\eta} C_{kl,\rho\sigma} C_{\xi\eta} a_{\xi\sigma} a_{\rho\eta} = \\ &= UC_{ij} \cdot \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\xi} \sum_{\eta} \frac{C_{kl} C_{\rho\sigma} - C_{k\sigma} C_{\rho l}}{C} C_{\xi\eta} a_{\xi\sigma} a_{\rho\eta} \\ &= UC_{ij} \left\{ \frac{C_{kl}}{C} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\xi} \sum_{\eta} (C_{\rho\eta} C_{\xi\sigma} - C \cdot C_{\rho\eta, \xi\sigma}) a_{\xi\sigma} a_{\rho\eta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{C} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\xi} \sum_{\eta} C_{k\sigma} (C_{\xi l} C_{\rho\eta} - C \cdot C_{\xi l, \rho\eta}) a_{\xi\sigma} a_{\rho\eta} \right\} \\ &= UC_{ij} \left\{ \frac{C_{kl}}{C} [(UC)^2 - C \cdot U^2 C] - \frac{UC}{C} \sum_{\sigma} \sum_{\xi} C_{k\sigma} C_{\xi l} a_{\xi\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma} \sum_{\xi} C_{l,\sigma} UC_{\xi l} a_{\xi\sigma} \right\} \end{aligned}$$

Making use of the formula (68), which, in this case, takes the form:

$$\sum_{\sigma} \sum_{\xi} C_{k\sigma} UC_{\xi l} a_{\xi\sigma} = \frac{1}{2} (C_{kl} U^2 C - C \cdot U^2 C_{kl}),$$

we find:

$$\begin{aligned} S_1 &= UC_{ij} \cdot \left\{ \frac{(UC)^2}{C} C_{kl} - U^2 C \cdot C_{kl} - \frac{UC}{C} \sum_{\sigma} \sum_{\xi} (C_{kl} C_{\xi\sigma} - C \cdot C_{kl, \xi\sigma}) a_{\xi\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} U^2 C \cdot C_{kl} - \frac{1}{2} C \cdot U^2 C_{kl} \right\} \\ &= UC_{ij} \left\{ \frac{(UC)^2}{C} C_{kl} - U^2 C \cdot C_{kl} - \frac{(UC)^2}{C} C_{kl} + UC \cdot UC_{kl} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} U^2 C \cdot C_{kl} - \frac{1}{2} C \cdot U^2 C_{kl} \right\}, \end{aligned}$$

or

$$S_1 = -\frac{1}{2} UC_{ij} \cdot (U^2 C \cdot C_{kl} - 2 UC \cdot UC_{kl} + C \cdot U^2 C_{kl}) \quad (72_1)$$

The expression (62) for  $S_2$  becomes, by interchanging  $\lambda$  and  $\varrho$ ,  $\mu$  and  $\sigma$ ,

$$S_2 = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\xi} \sum_{\eta} C_{ij, \rho\sigma} C_{kl, \lambda\mu} a_{\lambda\mu} a_{\xi\sigma} a_{\rho\eta};$$

so it derives from  $S_1$  by interchanging  $i$  and  $k$ ,  $j$  and  $l$ .

Hence

$$S_2 = -\frac{1}{2} UC_{kl} \cdot (U^2 C \cdot C_{ij} - 2 UC \cdot UC_{ij} + C \cdot U^2 C_{ij}) \quad (72_2)$$

Summing up these latter results, we find, putting  $C=0$ ,

$$S = S_1 + S_2 = -\frac{1}{2} U^2 C \cdot U(C_{ij} C_{kl}) + 2 UC \cdot UC_{ij} \cdot UC_{kl} \quad (73)$$

The factor of  $2\varphi_0$  in the equation (63) now takes, by (70), (71) and (73), the value:

$$\begin{aligned} Q + 2R - \frac{2}{UC} S = & UC \cdot (UC_{ij, kl} + UC_{lj, lk}) + UC_{il} \cdot UC_{kj} + \\ & + UC_{ik} \cdot UC_{lj} - C_{kl} U^2 C_{ij} - C_{ij} U^2 C_{kl} + 2 UC_{ij} \cdot UC_{kl} + \\ & + \frac{U^2 C}{UC} \cdot U(C_{ij} C_{kl}) - 4 UC_{ij} \cdot UC_{kl} \\ = & UC \cdot (UC_{ij, kl} + UC_{lj, lk}) + UC_{il} \cdot UC_{kj} + UC_{lk} \cdot UC_{lj} - \\ & - 2 UC_{ij} \cdot UC_{kl} - C_{kl} U^2 C_{ij} - C_{ij} U^2 C_{kl} + \\ & + \frac{U^2 C}{UC} \cdot U(C_{ij} C_{kl}). \end{aligned}$$

From

$$\begin{aligned} UC \cdot UC_{ij, kl} &= U(C \cdot UC_{ij, kl}) - C \cdot U^2 C_{ij, kl} = U \{ U(C \cdot C_{ij, kl}) - \\ & \quad - UC \cdot C_{ij, kl} \} - 0 \\ &= U^2 (C_{ij} C_{kl} - C_{il} C_{kj}) - U^2 C \cdot C_{ij, kl} - UC \cdot UC_{ij, kl} \end{aligned}$$

ensues:

$$2 UC \cdot UC_{ij, kl} = U(C_{kl} UC_{ij} + C_{ij} UC_{kl} - C_{kj} UC_{il} - C_{il} UC_{kj}) - U^2 C \cdot C_{ij, kl},$$

or

$$\begin{aligned} UC \cdot UC_{ij, kl} = & \frac{1}{2} (C_{kl} U^2 C_{ij} + C_{ij} U^2 C_{kl} - C_{kj} U^2 C_{il} - C_{il} U^2 C_{kj} + \\ & + 2 UC_{ij} \cdot UC_{kl} - 2 UC_{il} \cdot UC_{kj} - U^2 C \cdot C_{ij, kl}). \end{aligned}$$

Likewise:

$$\begin{aligned} UC \cdot UC_{ij, lk} = & \frac{1}{2} (C_{lk} U^2 C_{ij} + C_{ij} U^2 C_{lk} - C_{lj} U^2 C_{ik} - C_{ik} U^2 C_{lj} + \\ & + 2 UC_{ij} \cdot UC_{lk} - 2 UC_{ik} \cdot UC_{lj} - U^2 C \cdot C_{ij, lk}), \end{aligned}$$

whence:

$$\begin{aligned} UC \cdot (UC_{ij, kl} + UC_{ij, lk}) &= C_{kl} U^2 C_{ij} + C_{ij} U^2 C_{kl} - \\ & - \frac{1}{2} (C_{kj} U^2 C_{il} + C_{il} U^2 C_{kj} + C_{lj} U^2 C_{ik} + C_{ik} U^2 C_{lj}) + \\ & + 2 UC_{ij} \cdot UC_{kl} - UC_{il} \cdot UC_{kj} - UC_{ik} \cdot UC_{lj} - \frac{1}{2} U^2 C \cdot (C_{ij, kl} + C_{ij, lk}). \end{aligned}$$

So we obtain :

$$Q + 2R - \frac{2}{UC} S = -\frac{1}{2} (C_{kj} U^2 C_{il} + C_{il} U^2 C_{kj} + C_{lj} U^2 C_{ik} + C_{ik} U^2 C_{lj}) + \\ + \frac{U^2 C}{UC} \{ U(C_{ij} C_{kl}) - \frac{1}{2} UC \cdot (C_{ij,kl} + C_{ij,lk}) \},$$

or, by

$$UC \cdot (C_{ij,kl} + C_{ij,lk}) = U(C \cdot C_{ij,kl} + C \cdot C_{ij,lk}) - C \cdot U(C_{ij,kl} + C_{ij,lk}) \\ = U(C_{ij} C_{kl} - C_{il} C_{kj} + C_{ij} C_{kl} - C_{ik} C_{lj}) = \\ = 2U(C_{ij} C_{kl}) - U(C_{il} C_{kj} + C_{ik} C_{lj}),$$

$$Q + 2R - \frac{2}{UC} S = -\frac{1}{2} (C_{kj} U^2 C_{il} + C_{il} U^2 C_{kj} + C_{lj} U^2 C_{ik} + C_{ik} U^2 C_{lj}) + \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{U^2 C}{2UC} \cdot U(C_{il} C_{kj} + C_{ik} C_{lj}). \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Thus the equation (63) may, by (65) and (74), be brought into the following form :

$$M(\Delta C_{ij} \Delta C_{kl}) = \frac{\varphi_0}{N-n} [U(C_{il} C_{kj} + C_{ik} C_{lj}) + \\ + \varphi_0 \{ -(C_{kj} U^2 C_{il} + C_{il} U^2 C_{kj} + C_{lj} U^2 C_{ik} + C_{ik} U^2 C_{lj}) + \\ + \frac{U^2 C}{UC} \cdot U(C_{il} C_{kj} + C_{ik} C_{lj}) \} ],$$

or

$$M(\Delta C_{ij} \Delta C_{kl}) = \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ U(C_{il} C_{kj} + C_{ik} C_{lj}) \cdot \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \right. \\ \left. - \varphi_0 (C_{kj} U^2 C_{il} + C_{il} U^2 C_{kj} + C_{lj} U^2 C_{ik} + C_{ik} U^2 C_{lj}) \right\} \quad (75)$$

In case two or more of the subscripts  $i, j, k, l$  are equal, we obtain :

$$l=j \quad M(\Delta C_{ij} \Delta C_{kj}) = \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ U(C_{ij} C_{kj} + C_{ik} C_{jj}) \cdot \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \right. \\ \left. - \varphi_0 (C_{kj} U^2 C_{ij} + C_{ij} U^2 C_{kj} + C_{jj} U^2 C_{ik} + C_{ik} U^2 C_{jj}) \right\} \quad (75) [ij, kj]$$

$$i=i \quad M(\Delta C_{il} \Delta C_{kl}) = \frac{2\varphi_0}{N-n} \left\{ U(C_{ik} C_{il}) \cdot \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \right. \\ \left. - \varphi_0 (C_{il} U^2 C_{ik} + C_{ik} U^2 C_{il}) \right\} \quad (75) [ii, kl]$$

$$k=i, l=j \quad M(\Delta C_{ij}^2) = \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ U(C_{ij}^2 + C_{ii} C_{jj}) \cdot \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \right. \\ \left. - \varphi_0 (2 C_{ij} U^2 C_{ij} + C_{jj} U^2 C_{ii} + C_{ii} U^2 C_{jj}) \right\} \quad (75) [ij, ij]$$



$$\begin{aligned}
 j=i, l=k \quad M(\Delta C_{ii} \Delta C_{kk}) &= \frac{2\varphi_0}{N-n} \left\{ U(C_{ik}^2) \cdot \left(1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\varphi_0 C_{ik} U^2 C_{ik} \right\} = \frac{4\varphi_0 C_{ik}}{N-n} \left\{ UC_{ik} \cdot \left(1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC}\right) - \varphi_0 U^2 C_{ik} \right\} \quad (75) [ii, kk] \\
 j=i, l=i \quad M(\Delta C_{ii} \Delta C_{ik}) &= \frac{2\varphi_0}{N-n} \left\{ U(C_{ii} C_{ik}) \cdot \left(1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - \varphi_0 (C_{ii} U^2 C_{ik} + C_{ik} U^2 C_{ii}) \right\} \quad (75) [ii, ik] \\
 j=k=l=i \quad M(\Delta C_{ii}^2) &= \frac{4\varphi_0 C_{ii}}{N-n} \left\{ UC_{ii} \cdot \left(1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - \varphi_0 U^2 C_{ii} \right\} \quad (75) [ii, ii]
 \end{aligned}$$

We will moreover calculate  $M(\Delta C_{ij} \Delta UC)$  and  $M\{(\Delta UC)^2\}$ .

From

$$\Delta UC = \Delta \sum_{\lambda \mu} \sum C_{\lambda \mu} a_{\lambda \mu} = \sum_{\lambda \mu} \sum a_{\lambda \mu} \Delta C_{\lambda \mu}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
 M(\Delta C_{ij} \Delta UC) &= \sum_{\lambda \mu} \sum M(\Delta C_{ij} \Delta C_{\lambda \mu}) \cdot a_{\lambda \mu} \\
 &= \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ \sum_{\lambda \mu} \sum U(C_{i\mu} C_{j\lambda} + C_{i\lambda} C_{\mu j}) a_{\lambda \mu} \cdot \left(1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - \varphi_0 \sum_{\lambda \mu} \sum (C_{i\lambda} U^2 C_{j\mu} + C_{i\mu} U^2 C_{j\lambda} + C_{\mu j} U^2 C_{i\lambda} + \right. \\
 &\quad \left. + C_{i\lambda} U^2 C_{\mu j}) a_{\lambda \mu} \right\} \quad (76)
 \end{aligned}$$

Putting

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda \mu} \sum U(C_{i\mu} C_{j\lambda}) a_{\lambda \mu} &= T_1, \quad \sum_{\lambda \mu} \sum U(C_{i\lambda} C_{\mu j}) a_{\lambda \mu} = T_2, \quad T = T_1 + T_2, \\
 \sum_{\lambda \mu} \sum C_{\lambda j} U^2 C_{i\mu} a_{\lambda \mu} &= V_1, \quad \sum_{\lambda \mu} \sum C_{i\mu} U^2 C_{\lambda j} a_{\lambda \mu} = V_2, \\
 \sum_{\lambda \mu} \sum C_{\mu j} U^2 C_{i\lambda} a_{\lambda \mu} &= V_3, \quad \sum_{\lambda \mu} \sum C_{i\lambda} U^2 C_{\mu j} a_{\lambda \mu} = V_4, \\
 &\quad V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4,
 \end{aligned} \quad (77)$$

we have

$$M(\Delta C_{ij} \Delta UC) = \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ T \cdot \left(1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC}\right) - \varphi_0 V \right\} \quad (78)$$

The expression  $T_1$  may be transformed as follows:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \sum_{\lambda \mu} \sum U(C_{i\mu} C_{\lambda j}) a_{\lambda \mu} = U \left\{ \sum_{\lambda \mu} \sum (C_{ij} C_{\lambda \mu} - C_{i\lambda} C_{j\mu}) a_{\lambda \mu} \right\} = \\
 &= U(C_{ij} UC - CUC_{ij}) = C_{ij} U^2 C - C_{i\lambda} U^2 C_{j\lambda} = C_{ij} U^2 C.
 \end{aligned}$$

Likewise :

$$T_2 = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} U(C_{ij} C_{\mu j}) a_{j\mu} = U \left\{ \sum_{\lambda} \sum_{\mu} (C_{ij} C_{\mu j} - C \cdot C_{ij, \mu j}) a_{j\mu} \right\} = C_{ij} U^2 C,$$

whence

$$T = 2 C_{ij} U^2 C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

In reducing the expression  $V_1$  we observe, that

$$\sum_{\mu} C_{i\mu} a_{j\mu} = \sum_{\mu} C_{i\mu} U c_{j\mu} = U (\sum_{\mu} C_{i\mu} C_{j\mu}) - \sum_{\mu} U C_{i\mu} \cdot c_{j\mu} = \delta_{ij} U C - \sum_{\mu} U C_{i\mu} \cdot c_{j\mu},$$

thus

$$\sum_{\mu} U C_{i\mu} a_{\lambda\mu} = U (\sum_{\mu} C_{i\mu} a_{\lambda\mu}) = \delta_{i\lambda} U^2 C - \sum_{\mu} U^2 C_{i\mu} \cdot c_{\lambda\mu} - \sum_{\mu} U C_{i\mu} \cdot a_{\lambda\mu},$$

or

$$2 \sum_{\mu} U C_{i\mu} a_{\lambda\mu} = \delta_{i\lambda} U^2 C - \sum_{\mu} U^2 C_{i\mu} \cdot c_{\lambda\mu}.$$

Hence

$$2 \sum_{\mu} U^2 C_{i\mu} a_{j\mu} = U (2 \sum_{\mu} U C_{i\mu} a_{j\mu}) = \delta_{ij} U^3 C - \sum_{\mu} U^3 C_{i\mu} \cdot c_{j\mu} - \sum_{\mu} U^2 C_{i\mu} \cdot a_{j\mu},$$

or

$$3 \sum_{\mu} U^2 C_{i\mu} a_{j\mu} = \delta_{ij} U^3 C - \sum_{\mu} U^3 C_{i\mu} \cdot c_{j\mu}.$$

So we find for  $V_1$ :

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} C_{\lambda j} U^2 C_{i\mu} a_{j\mu} = \frac{1}{3} (\sum_{\lambda} C_{ij} \delta_{i\lambda} U^3 C - \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda j} c_{\lambda\mu} U^3 C_{i\mu}) = \\ &= \frac{1}{3} (C_{ij} U^3 C - C \cdot \sum_{\mu} \delta_{j\mu} U^3 C_{i\mu}) \\ &= \frac{1}{3} (C_{ij} U^3 C - C \cdot U^3 C_{ij}), \end{aligned}$$

or by  $C = 0$ ,

$$V_1 = \frac{1}{3} C_{ij} U^3 C.$$

Likewise

$$V_2 = V_3 = V_4 = \frac{1}{3} C_{ij} U^3 C$$

and

$$V = \frac{4}{3} C_{ij} U^3 C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Thus the formula (78) may be written in the form:

$$M(\Delta C_{ij} \Delta UC) = \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ 2 C_{ij} U^2 C \cdot \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \frac{4}{3} \varphi_0 C_{ij} U^3 C \right\}.$$

or

$$M(\Delta C_{ij} \Delta UC) = \frac{2\varphi_0 C_{ij}}{N-n} \left\{ U^2 C \cdot \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \frac{2}{3} \varphi_0 U^3 C \right\}. \quad (81)$$

Finally we calculate  $M\{(\Delta UC)^2\}$ :

$$M\{(\Delta UC)^2\} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} M(\Delta C_{\lambda\mu} \cdot \Delta UC) a_{\lambda\mu},$$

or, by (81),

$$M\{(\Delta UC)^2\} = \frac{2\varphi_0}{N-n} \left( \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} a_{i,\mu} \right) \cdot \left\{ U^2 C \cdot \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \frac{2}{3} \varphi_0 U^3 C \right\},$$

thus:

$$M\{(\Delta UC)^2\} = \frac{2\varphi_0 UC}{N-n} \left\{ U^2 C \cdot \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \frac{2}{3} \varphi_0 U^3 C \right\}, \quad (82)$$

or

$$M\{(\Delta UC)^2\} = \frac{2\varphi_0}{N-n} \{ UC \cdot U^2 C + \varphi_0 (U^2 C)^2 - \frac{2}{3} \varphi_0 UC \cdot U^3 C \} \quad (82')$$

By means of these results we are now able to compute the mean squares and products of the errors of  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

We must first normalize these direction-parameters. This may be done in several ways, but in any case we must divide the parameter  $p_i$  by a homogeneous function of the  $p_1, p_2, \dots, p_n$  of degree unity. As this divisor may not be zero, it must take the form of the  $(2\nu)^{\text{th}}$  root of a positive-definite form of degree  $2\nu$ .

We shall confine ourselves to the simplest case, that the divisor is the square root of a positive-definite quadratic form:

$$\varepsilon = \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n e_{\lambda\mu} p_{\lambda} p_{\mu}. \quad (83)$$

Then, denoting the normalized parameter by  $r_i$ , we have

$$r_i^2 = \frac{p_i^2}{\varepsilon} = \frac{1}{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} \frac{p_{\lambda} p_{\mu}}{p_i^2}} = \frac{1}{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} \frac{\sqrt{C_{\lambda\lambda} C_{\mu\mu}}}{C_{ii}}} = \frac{C_{ii}}{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu}},$$

or, putting

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu} = VC, \quad (84)$$

$$r_i^2 = \frac{C_{ii}}{VC} \quad (85)$$

Hence

$$2 r_i \Delta r_i = \frac{VC \cdot \Delta C_{ii} - C_{ii} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} \Delta C_{\lambda\mu}}{(VC)^2},$$

likewise

$$2 r_k \Delta r_k = \frac{VC \cdot \Delta C_{kk} - C_{kk} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e_{\rho\sigma} \Delta C_{\rho\sigma}}{(VC)^2},$$

so that

$$\begin{aligned} 4 r_i r_k M(\Delta r_i \Delta r_k) &= \frac{1}{(VC)^4} \{ (VC)^2 \cdot M(\Delta C_{ii} \Delta C_{kk}) - \\ &- VC \cdot C_{kk} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e_{\rho\sigma} M(\Delta C_{ii} \Delta C_{\rho\sigma}) - VC \cdot C_{ii} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} M(\Delta C_{kk} \Delta C_{\lambda\mu}) + \\ &+ C_{ii} C_{kk} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e_{\lambda\mu} e_{\rho\sigma} M(\Delta C_{\lambda\mu} \Delta C_{\rho\sigma}) \}, \end{aligned}$$

or

$$M(\Delta r_i \Delta r_k) = \frac{1}{4 \sqrt{C_{ii} C_{kk}} (VC)^3} \left\{ (VC)^2 \cdot M(\Delta C_{ii} \Delta C_{kk}) - \right. \\ \left. - VC \cdot C_{kk} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e_{\rho\sigma} M(\Delta C_{ii} \Delta C_{\rho\sigma}) - \right. \\ \left. - VC \cdot C_{ii} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} M(\Delta C_{kk} \Delta C_{\lambda\mu}) + \right. \\ \left. + C_{ii} C_{kk} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e_{\lambda\mu} e_{\rho\sigma} M(\Delta C_{\lambda\mu} \Delta C_{\rho\sigma}) \right\}; \quad (86) [i, k]$$

in particular,

$$M(\Delta r_i^2) = \frac{1}{4 C_{ii} (VC)^3} \left\{ (VC)^2 \cdot M(\Delta C_{ii}^2) - \right. \\ \left. - 2 VC \cdot C_{ii} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} M(\Delta C_{ii} \Delta C_{\lambda\mu}) + \right. \\ \left. + C_{ii}^2 \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e_{\lambda\mu} e_{\rho\sigma} M(\Delta C_{\lambda\mu} \Delta C_{\rho\sigma}) \right\} \quad (86) [i, i]$$

In order to compute the uncertainty of the corresponding parameter

$r_0 = \frac{p_0}{\sqrt{\epsilon}}$ , we observe, that from

$$r_0 = - \sum_{\lambda=1}^n r_{\lambda} \bar{x}_{\lambda}$$

follows:

$$\Delta r_0 = - \sum_{\lambda=1}^n r_{\lambda} \Delta \bar{x}_{\lambda} - \sum_{\lambda=1}^n \bar{x}_{\lambda} \Delta r_{\lambda}, \dots \quad (87)$$

whence

$$M(\Delta r_0 \Delta r_i) = - \sum_{\lambda=1}^n r_{\lambda} M(\Delta \bar{x}_{\lambda} \Delta r_i) - \sum_{\lambda=1}^n \bar{x}_{\lambda} M(\Delta r_{\lambda} \Delta r_i) \quad (88)$$

The uncertainty of  $r_i = \frac{p_i}{\sqrt{\epsilon}}$  is exclusively due to that of the quantities  $b_{kl}(k, l = 1, \dots, n)$ ; thus

$$\Delta r_i = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} r_{i;\rho\sigma} \Delta b_{\rho\sigma}$$

and

$$M(\Delta r_i \Delta \bar{x}_j) = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} r_{i;\rho\sigma} M(\Delta b_{\rho\sigma} \Delta \bar{x}_j) \quad (89)$$

From

$$\bar{x}_j = \frac{[x_j]}{N}, \quad b_{\rho\sigma} = \frac{[u_{\rho} u_{\sigma}]}{N}$$

ensues

$$\Delta \bar{x}_j = \frac{[\Delta x_j]}{N}, \quad \Delta b_{\rho\sigma} = \frac{[u_{\sigma} \Delta u_{\rho}] + [u_{\rho} \Delta u_{\sigma}]}{N},$$

whence

$$M(\Delta b_{\rho\sigma} \Delta \bar{x}_j) = \frac{1}{N^2} \{ M([u_{\sigma} \Delta u_{\rho}] [\Delta x_j]) + M([u_{\rho} \Delta u_{\sigma}] [\Delta x_j]) \}.$$

Since  $\Delta x_j$ , and consequently  $\Delta u_\rho, \Delta u_\tau$  are independent of  $u_\rho, u_\tau$ , we have

$$M([u_\tau \Delta_\rho][\Delta x_j]) = M[u_\tau] \cdot M(\Delta u_\rho [\Delta x_j]),$$

or, by  $[u_\tau] = 0$  ((21)),

$M([u_\tau \Delta u_\rho][\Delta x_j]) = 0$ ; likewise:  $M([u_\rho \Delta u_\tau][\Delta x_j]) = 0$ , whence

$$M(\Delta b_{\rho\tau} \Delta \bar{x}_j) = 0 \dots \dots \dots (90)$$

and, by (89),

$$M(\Delta r_i \Delta \bar{x}_j) = 0 \dots \dots \dots (91)$$

So (88) reduces to

$$M(\Delta r_0 \Delta r_l) = - \sum_{\lambda=1}^n \bar{x}_\lambda M(\Delta r_\lambda \Delta r_l) \dots \dots \dots (92)$$

Finally we derive from (87)

$$M(\Delta r_0^2) = - \sum_{\mu=1}^n r_\mu M(\Delta r_0 \Delta \bar{x}_\mu) - \sum_{\mu=1}^n \bar{x}_\mu M(\Delta r_0 \Delta r_\mu),$$

or

$$M(\Delta r_0^2) = + \left. \begin{aligned} & \sum_{\lambda, \mu} r'_\lambda r_\mu M(\Delta \bar{x}_\lambda \Delta \bar{x}_\mu) + 2 \sum_{\lambda, \mu} r_\lambda \bar{x}_\mu M(\Delta r_\mu \Delta \bar{x}_\lambda) + \\ & + \sum_{\lambda, \mu} \bar{x}_\lambda \bar{x}_\mu M(\Delta r_\lambda \Delta r_\mu) \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

We have now

$$M(\Delta \bar{x}_\lambda \Delta \bar{x}_\mu) = \frac{M(\Delta x_\lambda \Delta x_\mu)}{N},$$

or, by (45),

$$M(\Delta \bar{x}_\lambda \Delta \bar{x}_\mu) = \frac{\varphi_0}{N-n} a_{\lambda\mu} \dots \dots \dots (94)$$

Thus the equation (93) may, by (91) and (94), be reduced to

$$M(\Delta r_0^2) = \frac{\varphi_0}{N-n} \sum_{\lambda, \mu} r_\lambda r_\mu a_{\lambda\mu} + \sum_{\lambda, \mu} \bar{x}_\lambda \bar{x}_\mu M(\Delta r_\lambda \Delta r_\mu),$$

or, since

$$\sum_{\lambda, \mu} r_\lambda r_\mu a_{\lambda\mu} = \frac{\sum_{\lambda, \mu} \sqrt{C_{\lambda\lambda} C_{\mu\mu}} \cdot a_{\lambda\mu}}{VC} = \frac{\sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu}}{VC} = \frac{UC}{VC},$$

$$M(\Delta r_0^2) = \frac{\varphi_0}{N-n} \cdot \frac{UC}{VC} + \sum_{\lambda, \mu} \bar{x}_\lambda \bar{x}_\mu M(\Delta r_\lambda \Delta r_\mu) \dots \dots (95)$$

In case  $p_i$  is normalized to the direction-cosine, denoted by  $s_i$ , we have  $e_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}$  ( $=1$  for  $\mu = \lambda$ , and  $=0$  for  $\mu \neq \lambda$ , whence  $VC$  passes into

$$\sum_{\lambda=1}^n C_{\lambda\lambda} = V_1 C \dots \dots \dots (96)$$



So the formula (86) takes the form:

$$M(\Delta s_i \Delta s_k) = \frac{1}{4 \sqrt{C_{ii} C_{kk}} \cdot (V_1 C)^3} \{ (V_1 C)^2 M(\Delta C_{ii} \Delta C_{kk}) - \\ - V_1 C \cdot C_{kk} \sum_{\rho} M(\Delta C_{ii} \Delta C_{\rho\rho}) - V_1 C \cdot C_{ii} \sum_{\rho} M(\Delta C_{kk} \Delta C_{\rho\rho}) + \\ + C_{ii} C_{kk} \sum_{\lambda} \sum_{\rho} M(\Delta C_{\lambda\lambda} \Delta C_{\rho\rho}) \},$$

or, by (75)  $[ii, kk]$ ,

$$M(\Delta s_i \Delta s_k) = \\ = \frac{1}{4 \sqrt{C_{ii} C_{kk}} \cdot (V_1 C)^3} \left( (V_1 C)^2 \cdot \frac{4\varphi_0 \sqrt{C_{ii} C_{kk}}}{N-n} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) UC_{ik} - \right. \right. \\ \left. \left. - \varphi_0 U^2 C_{ik} \right\} - V_1 C \cdot C_{kk} \frac{4\varphi_0}{N-n} \sum_{\rho} \sqrt{C_{ii} C_{\rho\rho}} \cdot \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) UC_{i\rho} - \varphi_0 U^2 C_{i\rho} \right\} - \right. \\ \left. - V_1 C \cdot C_{ii} \frac{4\varphi_0}{N-n} \sum_{\lambda} \sqrt{C_{kk} C_{\lambda\lambda}} \cdot \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) UC_{k\lambda} - \varphi_0 U^2 C_{k\lambda} \right\} + \right. \\ \left. + C_{ii} C_{kk} \frac{4\varphi_0}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\rho} C_{\lambda\rho} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) UC_{\lambda\rho} - \varphi_0 U^2 C_{\lambda\rho} \right\} \right)$$

$$M(\Delta s_i \Delta s_k) = \frac{\varphi_0}{(N-n)(V_1 C)^3} \left( \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) \{ (V_1 C)^2 \cdot UC_{ik} - \right. \\ - V_1 C \cdot \sum_{\rho} C_{k\rho} UC_{i\rho} - V_1 C \cdot \sum_{\lambda} C_{i\lambda} UC_{k\lambda} + C_{ik} \sum_{\lambda} \sum_{\rho} C_{\lambda\rho} UC_{\lambda\rho} \} - \\ - \varphi_0 \{ (V_1 C)^2 U^2 C_{ik} - V_1 C \cdot \sum_{\rho} C_{k\rho} U^2 C_{i\rho} - \\ \left. - V_1 C \cdot \sum_{\lambda} C_{i\lambda} U^2 C_{k\lambda} + C_{ik} \sum_{\lambda} \sum_{\rho} C_{\lambda\rho} U^2 C_{\lambda\rho} \} \right)$$

or

$$M(\Delta s_i \Delta s_k) = \frac{\varphi_0}{(N-n)(V_1 C)^3} \left( \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) \left\{ (V_1 C)^2 \cdot UC_{ik} - \right. \right. \\ \left. \left. - V_1 C \cdot \sum_{\lambda} U(C_{i\lambda} C_{\lambda k}) + \frac{C_{ik}}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} U(C_{\lambda\mu}^2) \right\} - \right. \\ \left. - \varphi_0 \{ (V_1 C)^2 \cdot U^2 C_{ik} - V_1 C \cdot \sum_{\lambda} C_{\lambda k} U^2 C_{i\lambda} - \right. \\ \left. - V_1 C \cdot \sum_{\lambda} C_{i\lambda} U^2 C_{\lambda k} + C_{ik} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} U^2 C_{\lambda\mu} \} \right), \quad (97) [i, k]$$

and, in particular,

$$M(\Delta s_i^2) = \frac{\varphi_0}{(N-n)(V_1 C)^3} \left( \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) \left\{ (V_1 C)^2 \cdot UC_{ii} - \right. \right. \\ \left. \left. - V_1 C \cdot \sum U(C_{i\lambda})^2 + \frac{C_{ii}}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} U(C_{\lambda\mu}^2) \right\} - \right. \\ \left. - \varphi_0 \{ (V_1 C)^2 \cdot U^2 C_{ii} - 2V_1 C \cdot \sum_{\lambda} C_{i\lambda} U^2 C_{i\lambda} + C_{ii} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} U^2 C_{\lambda\mu} \} \right) \quad (97) [i, i]$$

The movability of the points  $S$  in the different directions is expressed by the coefficients  $a_{ij}$ . So it may sometimes be preferable to normalize the  $p_i$  by dividing them by

$$\sqrt{a} = \sqrt{\sum \sum a_{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu}.$$

Doing so, we obtain the parameter

$$t_i = \frac{p_i}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{C_{ii}}{UC}} \dots \dots \dots (98)$$

Instead of substituting  $a_{i\mu}$  for  $e_{i\mu}$  in the equations (86), we may directly calculate the uncertainty of the  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) making use of (81) and (82).

From (98) follows

$$2t_i \Delta t_i = \frac{UC \cdot \Delta C_{ii} - C_{ii} \Delta UC}{(UC)^2}, \quad 2t_k \Delta t_k = \frac{UC \cdot \Delta C_{kk} - C_{kk} \Delta UC}{(UC)^2},$$

whence

$$4t_i t_k M(\Delta t_i \Delta t_k) = \frac{1}{(UC)^4} \left\{ (UC)^2 M(\Delta C_{ii} \Delta C_{kk}) - \right. \\ \left. - UC \cdot C_{kk} M(\Delta C_{ii} \Delta UC) - UC \cdot C_{ii} M(\Delta C_{kk} \Delta UC) + C_{ii} C_{kk} M\{(\Delta UC)^2\} \right\},$$

or

$$M(\Delta t_i \Delta t_k) = \frac{1}{4\sqrt{C_{ii} C_{kk}} \cdot (UC)^3} \left\{ (UC)^2 M(\Delta C_{ii} \Delta C_{kk}) - \right. \\ \left. - UC \cdot C_{kk} M(\Delta C_{ii} \Delta UC) - UC \cdot C_{ii} M(\Delta C_{kk} \Delta UC) + \right. \\ \left. + C_{ii} C_{kk} M\{(\Delta UC)^2\} \right\}.$$

Applying (75)  $[ii, kk]$ , (81) and (82), we obtain

$$M(\Delta t_i \Delta t_k) = \frac{1}{4C_{ik}(UC)^3} \left\{ (UC)^2 \frac{4\varphi_0 C_{ik}}{N-n} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) UC_{ik} - \varphi_0 U^2 C_{ik} \right\} - \right. \\ \left. - UC \cdot C_{kk} \frac{2\varphi_0 C_{ii}}{N-n} \left\{ \left( 1 - \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) U^2 C - \frac{2}{3} \varphi_0 U^3 C \right\} - \right. \\ \left. - UC \cdot C_{ii} \frac{2\varphi_0 C_{kk}}{N+n} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) U^2 C - \frac{2}{3} \varphi_0 U^3 C \right\} + \right. \\ \left. + C_{ii} C_{kk} \cdot \frac{2\varphi_0 UC}{N-n} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) U^2 C - \frac{2}{3} \varphi_0 U^3 C \right\} \right\}.$$

or

$$M(\Delta t_i \Delta t_k) = \frac{\varphi_0}{(N-n)(UC)^2} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) (UC \cdot UC_{ik} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} C_{ik} U^2 C) - \varphi_0 (UC \cdot U^2 C_{ik} - \frac{1}{3} C_{ik} U^2 C) \right\} \quad (99) [i, k]$$

and, in particular,

$$M(\Delta t_i^2) = \frac{\varphi_0}{(N-2)(UC)^2} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) (UC \cdot UC_{ii} - \frac{1}{2} C_{ii} U^2 C - \right. \\ \left. - \varphi_0 (UC \cdot U^2 C_{ii} - \frac{1}{2} C_{ii} U^3 C) \right\} \quad (99)[i,i]$$

Moreover (95) passes into:

$$M(\Delta t_0^2) = \frac{\varphi_0}{N-n} + \sum_{\lambda} \sum_{\nu} \bar{x}_{\lambda} \bar{x}_{\nu} M(\Delta t_{\lambda} \Delta t_{\nu}) \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

The parameters  $t_i$  are distinguished by a particular property.

From

$$2 t_i \Delta t_i = \frac{UC \cdot \Delta C_{ii} - C_{ii} \Delta UC}{(UC)^2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

follows:

$$2 t_i M(\Delta t_i \Delta \varphi_0) = \frac{UC \cdot M(\Delta C_{ii} \Delta \varphi_0) - C_{ii} M(\Delta UC \cdot \Delta \varphi_0)}{(UC)^2} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

By (58) and (59) we obtain

$$2 t_i M(\Delta t_i \Delta \varphi_0) = \frac{UC \cdot \frac{-2\varphi_0^2}{N-n} \cdot \frac{U^2 C}{UC} \cdot C_{ii} - C_{ii} \cdot \frac{-2\varphi_0^2}{N-n} U^2 C}{(UC)^2} = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n$$

or

$$M(\Delta t_i \Delta \varphi_0) = 0. \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Since

$$t_0 = - \sum_{i=1}^n t_i \bar{x}_i$$

we have

$$\Delta t_0 = - \sum_i t_i \Delta \bar{x}_i - \sum_i \bar{x}_i \Delta t_i$$

and

$$M(\Delta t_0 \Delta \varphi_0) = - \sum_{\lambda} t_{\lambda} M(\Delta \bar{x}_{\lambda} \Delta \varphi_0) - \sum_{\lambda} \bar{x}_{\lambda} M(\Delta t_{\lambda} \Delta \varphi_0). \quad (102)$$

The uncertainty of  $\varphi_0$  being merely due to that of the  $b_{kl}$ , so that  $\Delta \varphi_0 = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \varphi_{0;\rho\sigma} \Delta b_{\rho\sigma}$ , we have, on account of (90),

$$M(\Delta \bar{x}_j \cdot \Delta \varphi_0) = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \varphi_{0;\rho\sigma} M(\Delta \bar{x}_j \Delta b_{\rho\sigma}) = 0; \quad . \quad . \quad (103)$$

so we obtain for (102), by (101) and (103),

$$M(\Delta t_0 \Delta \varphi_0) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Thus the variability of all the  $t_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) is independent of that of  $\varphi_0$ .

The normalisation of the parameters  $p_i$  to the parameters  $t_i$  may be interpreted as follows:

From

$$t_i = \frac{p_i}{\sqrt{a}} = \frac{p_i}{\sqrt{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} p_{\lambda} p_{\mu}}}$$

and

$$s_i = \frac{p_i}{\sqrt{\sum_{\lambda} p_{\lambda}^2}} \quad (s_i = \text{direction-cosine})$$

ensues

$$t_i = \frac{s_i}{\sqrt{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} s_{\lambda} s_{\mu}}} \quad \dots \quad (105)$$

The hyperellipsoids  $f \equiv \sum_{\lambda} \sum_{\mu} f_{\lambda\mu} \xi_{\lambda} \xi_{\mu} = \text{const.}$  are homothetic with the standard-hyperellipsoid

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} f_{\lambda\mu} x_{\lambda} x_{\mu} = 1 \quad \dots \quad (106)$$

The tangent hyperplane of the point  $R'(x'_i)$  is represented by

$$\sum_{\lambda} (\sum_{\mu} f_{\lambda\mu} x'_{\mu}) x_{\lambda} = 1 \quad \dots \quad (107)$$

In order that this tangent hyperplane be parallel to  $\tau$ , the conditions

$$\sum_{\mu} f_{k\mu} x'_{\mu} = H s_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

must be satisfied. Hence

$$x'_i = H \frac{\sum_{\lambda} F_{\lambda i} s_{\lambda}}{F}.$$

Since  $R'(x'_i)$  lies on the standard-hyperellipsoid (106), we have

$$\sum_{\rho} \sum_{\sigma} f_{\rho\sigma} x'_{\rho} x'_{\sigma} = 1,$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} f_{\rho\sigma} \cdot \frac{H}{F} \sum_{\lambda} F_{\lambda\rho} s_{\lambda} \cdot \frac{H}{F} \sum_{\mu} F_{\mu\sigma} s_{\mu} &= \frac{H^2}{F} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\sigma} \delta_{\lambda\sigma} F_{\mu\sigma} s_{\lambda} s_{\mu} = \\ &= H^2 \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \frac{F_{\lambda\mu}}{F} s_{\lambda} s_{\mu} = H^2 \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} s_{\lambda} s_{\mu} = 1, \end{aligned}$$

whence

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} s_{\lambda} s_{\mu} = \frac{1}{H^2} \quad \dots \quad (108)$$

The distance of the origin  $O$  from this tangent hyperplane being denoted by  $d$ , we have, by (107),

$$d = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\lambda} (\sum_{\mu} f_{\lambda\mu} x'_{\mu})^2}} = \frac{1}{H \sqrt{\sum_{\lambda} s_{\lambda}^2}} = \frac{1}{H}$$

or, by (108),

$$d = \sqrt{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} s_{\lambda} s_{\mu}} \quad \dots \quad (109)$$





Finally (26) furnishes the corresponding value of  $p_0$ .

The factor  $\theta$  turns out to be  $\theta = \frac{1}{2\varphi_0}$  (44).

## § 2. Uncertainty of the normalized parameters.

The uncertainty of the different quantities  $x_i$ ,  $\bar{x}_i$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $C_{ij}$ ,  $\varphi_0$  is characterized by the mean value of the squares and products of their errors.

Introducing  $U\Phi \equiv \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial c_{\lambda\mu}}$  (thus:  $UC = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu}$ ,  $U^2C = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} a_{\lambda\mu} a_{\rho\sigma} C_{\lambda\mu, \rho\sigma}$ , etc., (36),  $UC_{ij} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} C_{ij, \lambda\mu}$  etc.), we obtain

$$M(\Delta x_i \Delta x_k) = \frac{N}{N-n} \varphi_0 a_{ik} \quad , \quad M(\Delta \bar{x}_i \Delta \bar{x}_k) = \frac{1}{N-n} \varphi_0 a_{ik} \quad , \quad (46)$$

$$M(\Delta b_{ij} \Delta b_{kl}) = \frac{\varphi_0}{N-n} (a_{ik} b_{jl} + a_{jl} b_{ik} + a_{il} b_{kj} + a_{kj} b_{il}) \quad , \quad (47)$$

$$M(\Delta \varphi_0^2) = \frac{4\varphi_0^2}{N-n} \quad . \quad (55) \quad \text{or} \quad E(\varphi_0) = \frac{2\varphi_0}{\sqrt{N-n}} \quad . \quad (56)$$

$$M(\Delta c_{ij} \Delta c_{kl}) = \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ (b_{ik} a_{jl} + b_{jl} a_{ik} + b_{il} a_{kj} + b_{kj} a_{il}) - \right. \\ \left. - \frac{4\varphi_0 a_{ij}}{UC} \sum_{\xi} \sum_{\gamma} C_{\xi\gamma} a_{\xi l} a_{k\gamma} - \frac{4\varphi_0 a_{kl}}{UC} \sum_{\xi} \sum_{\gamma} C_{\xi\gamma} a_{\xi j} a_{i\gamma} + 4\varphi_0 a_{ij} a_{kl} \right\} \quad , \quad (60)$$

$$M(\Delta C_{ij} \Delta C_{kl}) = \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ U(C_{il} C_{kj} + C_{ik} C_{lj}) \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \right. \\ \left. - \varphi_0 (C_{kj} U^2 C_{il} + C_{il} U^2 C_{kj} + C_{lj} U^2 C_{ik} + C_{ik} U^2 C_{lj}) \right\} \quad (75)$$

with the main particular cases

$$M(\Delta C_{ii} \Delta C_{kk}) = \frac{4\varphi_0 C_{ik}}{N-n} \left\{ UC_{ik} \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \varphi_0 U^2 C_{ik} \right\} \quad , \quad (75)[ii, kk]$$

$$M(\Delta C_{ii}^2) = \frac{4\varphi_0 C_{ii}}{N-n} \left\{ UC_{ii} \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \varphi_0 U^2 C_{ii} \right\} \quad ; \quad (75)[ii, ii]$$

$$M(\Delta C_{ij} \Delta UC) = \frac{2\varphi_0 C_{ij}}{N-n} \left\{ U^2 C \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \frac{2}{3} \varphi_0 U^3 C \right\} \quad . \quad (81)$$

$$M\{(\Delta UC)^2\} = \frac{2\varphi_0 UC}{N-n} \left\{ U^2 C \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) - \frac{2}{3} \varphi_0 U^3 C \right\} \quad . \quad (82)$$

As a rule the  $p_i$  are normalized by dividing them by the square root of a positive-definite quadratic function of  $p_1, \dots, p_n$ :

$$\varepsilon = \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n e_{\lambda\mu} p_{\lambda} p_{\mu} \quad . \quad (83) \quad \text{Putting} \quad \sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu} = V(C) \quad , \quad (84)$$

the parameter  $p_i$  is normalized to  $r_i = \sqrt{\frac{C_{ii}}{VC}}$  (85), whence

$$M(\Delta r_i \Delta r_k) = \frac{1}{4\sqrt{C_{ii} C_{kk}} (VC)^3} \left\{ (VC)^2 M(\Delta C_{ii} \Delta C_{kk}) - \right. \\ \left. - VC \cdot C_{kk} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e_{\rho\sigma} M(\Delta C_{ii} \Delta C_{\rho\sigma}) - \right. \\ \left. - VC \cdot C_{ii} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} M(\Delta C_{kk} \Delta C_{\lambda\mu}) + \right. \\ \left. + C_{ii} C_{kk} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e_{\lambda\mu} e_{\rho\sigma} M(\Delta C_{\lambda\mu} \Delta C_{\rho\sigma}) \right\}, \quad (86) [i, k]$$

in particular:

$$M(\Delta r_i^2) = \frac{1}{4C_{ii}(VC)^3} \left\{ (VC)^2 M(\Delta C_{ii}^2) - \right. \\ \left. - 2 VC \cdot C_{ii} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} M(\Delta C_{ii} \Delta C_{\lambda\mu}) + \right. \\ \left. + C_{ii}^2 \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e_{\lambda\mu} e_{\rho\sigma} M(\Delta C_{\lambda\mu} \Delta C_{\rho\sigma}) \right\}. \quad (86) [i, i]$$

For  $r_0 = \frac{p_0}{\sqrt{\varepsilon}}$  we have

$$M(\Delta r_0 \Delta r_i) = - \sum_{\lambda=1}^n \bar{x}_{\lambda} M(\Delta r_{\lambda} \Delta r_i). \quad (92)$$

$$M(\Delta r_0^2) = \frac{\varphi_0}{N-n} \cdot \frac{UC}{VC} + \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \bar{x}_{\lambda} \bar{x}_{\mu} M(\Delta r_{\lambda} \Delta r_{\mu}). \quad (95)$$

Specialisations of  $e_{ij}$ :

I.  $e_{ij} = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ii} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0$  for  $j \neq i$ ),  $\varepsilon = \sum_{\lambda=1}^n p_{\lambda}^2$ ,  $VC = \sum_{\lambda} C_{\lambda\lambda} = V_1 C$ .

$$s_i = \frac{p_i}{\sqrt{\sum_{\lambda} p_{\lambda}^2}} = \sqrt{\frac{C_{ii}}{\sum_{\lambda} C_{\lambda\lambda}}}.$$

$$M(\Delta s_i \Delta s_k) = \frac{\varphi_0}{(N-n)(V_1 C)^3} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) \left\{ (V_1 C)^2 \cdot U C_{ik} - \right. \right. \\ \left. - V_1 C \cdot \sum_{\lambda} U(C_{i\lambda} C_{\lambda k}) + \frac{C_{ik}}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} U(C_{\lambda\mu}^2) \right\} - \varphi_0 \{ (V_1 C)^2 \cdot U^2 C_{ik} - \\ \left. - V_1 C \cdot \sum_{\lambda} C_{\lambda k} U^2 C_{i\lambda} - V_1 C \cdot \sum_{\lambda} C_{i\lambda} U^2 C_{\lambda k} + C_{ik} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} U^2 C_{\lambda\mu\nu} \} \right\}. \quad (97) [i, k]$$

$$M(\Delta s_i^2) = \frac{\varphi_0}{(N-n)(V_1 C)^3} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) \left\{ (V_1 C)^2 \cdot U C_{ii} - \right. \right. \\ \left. - V_1 C \cdot \sum_{\lambda} U(C_{i\lambda}^2) + \frac{C_{ii}}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} U(C_{\lambda\mu}^2) \right\} - \varphi_0 \{ (V_1 C)^2 \cdot U^2 C_{ii} - \\ \left. - 2 V_1 C \cdot \sum_{\lambda} C_{i\lambda} U^2 C_{i\lambda} + C_{ii} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} U^2 C_{\lambda\mu} \} \right\}. \quad (97) [i, i]$$

$$\text{II.} \quad e_{ij} = a_{ij}, \quad \varepsilon = a, \quad VC = UC, \quad t_i = \frac{p_i}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{C_{ii}}{UC}}. \quad . \quad . \quad (98)$$

$$M(\Delta t_i \Delta t_k) = \frac{\varphi_0}{(N-n)(UC)^2} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) (UC \cdot UC_{ik} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} C_{ik} U^2 C) - \varphi_0 (UC \cdot U^2 C_{ik} - \frac{1}{3} C_{ik} U^3 C) \right\}, \quad (99) [i, k]$$

$$M(\Delta t_i^2) = \frac{\varphi_0}{(N-n)(UC)^2} \left\{ \left( 1 + \varphi_0 \frac{U^2 C}{UC} \right) (UC \cdot UC_{ii} - \frac{1}{2} C_{ii} U^2 C) - \right. \\ \left. - \varphi_0 (UC \cdot U^2 C_{ii} - \frac{1}{3} C_{ii} U^3 C) \right\}, \quad (99) [i, i]$$

$$M(\Delta t_0^2) = \frac{\varphi_0}{N-n} + \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \bar{x}_{\lambda} \bar{x}_{\mu} M(\Delta t_{\lambda} \Delta t_{\mu}), \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

$$M(\Delta t_i \Delta \varphi_0) = 0. \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad . \quad . \quad (101), (104)$$

$$t_i = \frac{s_i}{d} \left( d = \text{distance of } O \text{ from the tangent hyperplane of } \right. \\ \left. \sum_{\lambda} \sum_{\mu} f_{\lambda\mu} x_{\lambda} x_{\mu} = 1 \text{ parallel to } \tau \right). \quad (110)$$

**Physics.** — *Ueber die Herstellung von Wismuteinkristallen.* Von L. SCHUBNIKOW. (Mitteilung N<sup>o</sup>. 207b aus dem Physikalischen Institut Leiden.) (Communicated by Prof. W. J. DE HAAS.)

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

*Einleitung.* Bis jetzt zeigen die an Wismut gemachten Beobachtungen sehr grosse Differenzen unter einander. Es wäre wahrscheinlich zu achten, dass Untersuchungen an Einkristalle gemacht mehr Klarheit bringen würden, und deshalb war es gewünscht an erster Stelle die Methodik der Einkristalle für die spezielle Messzwecke der Widerstandsbestimmung ohne und mit äusserem Magnetfeld auszuarbeiten. Wie man sehen wird, ist die schliesslich adoptierte Methodik nicht sehr verschieden von den Methoden nach welchen schon KAPITZA <sup>1)</sup> und GOETZ <sup>2)</sup> Einkristalle angefertigt haben. Im Laufe der Untersuchungen über die Methodik haben sich, wie in einer späteren Abhandlung gezeigt werden wird, wesentliche Bedingungen herausgestellt, welche in hohem Grade massgebend für die Reproduzierbarkeit der Widerstandsmessungen sind.

Im allgemeinen hat man die folgenden Methoden um Einkristalle von Metallen anzufertigen :

a. Das langsam Erstarren lassen von der Metallflüssigkeit. Die guten Kristalle werden vorsicht aus der Massa auspräpariert. Historisch lässt sich wohl kein bestimmter Namen mit dieser Methode verknüpfen.

b. Die neuere Methode der Rekristallisation, wobei man in geeigneter Weise ein bestimmtes Kristall auswachsen lässt.

c. Die Methode von COCHRALSKI <sup>3)</sup>, nach welcher der Kristall langsam aus der Flüssigkeitsmassa herausgezogen wird, mittels eines Impfkristalles.

d. Die Methode nach welcher man in einem mit flüssigem Metall gefüllten Röhrchen von einem bestimmten Punkte aus einen Kristall wachsen lässt. Diese Methode wurde ausgearbeitet von OBREIMOW und SCHUBNIKOW <sup>4)</sup>, und später auch von BRIDGMAN <sup>5)</sup>. Uebrigens hatte TAMMANN <sup>6)</sup> auch schon Wismutkristalle in einer anverwandten Weise angefertigt.

Zu dem Zweck den wir ins Auge gefasst hatten — Widerstands-

---

<sup>1)</sup> Proc. Roy. Soc. A. Vol. 119, p. 358. 1928.

<sup>2)</sup> Phys. Rev. Vol. 35 p. 193 1930.

<sup>3)</sup> Zeitschr. f. phys. Chem. Bd. 92, S. 290, 1918.

<sup>4)</sup> Zeitschr. f. Phys. Bd. 25, S. 31, 1924.

<sup>5)</sup> Proc. Amer. Acad. Arts and Sci. Vol. 60. p. 307, 1925.

<sup>6)</sup> Lehrbuch der Metallographie 1923, S. 16.

messungen an Wismut Einkristalle ausserhalb und innerhalb des Magnetfeldes — ist keine der obenerwähnten Methoden geeignet.

Die Methode a nicht, weil das mechanisch Bearbeiten von Wismuteinkristallen sofort Bildung von Zwillingen und Spalte verursacht.

Auch die anderen Methoden sind nicht geeignet weil es nicht gelingt nach ihnen die geometrischen Formen von Kristallen zu machen, welche für die Untersuchung nötig sind.

Die Bedingungen welche ich mir stellen musste waren :

10. Die Kristalle sollen zuvor bestimmte geometrische Formen haben,

20. Die Lage der Achse soll von vornherein festgelegt werden können.

Diese Bedingungen führen zu einer Methodik, welche sich eng an die von GOETZ und KAPITZA anschliesst. Die schliesslich benutzte Methode werde ich hier näher beschreiben, weil sie sich in zum Teil wichtigen Details von den zuletzt genannten Methoden unterscheidet.

§ 1. *Beschreibung des Apparates.* Der Apparat ist in den Figuren 1 und 2 abgebildet. Er besteht aus einer schweren vernickelten Kupferplatte  $P'$ — $P$ , die von einem Ofen  $O$ , auf der einen Seite erhitzt werden kann. Die

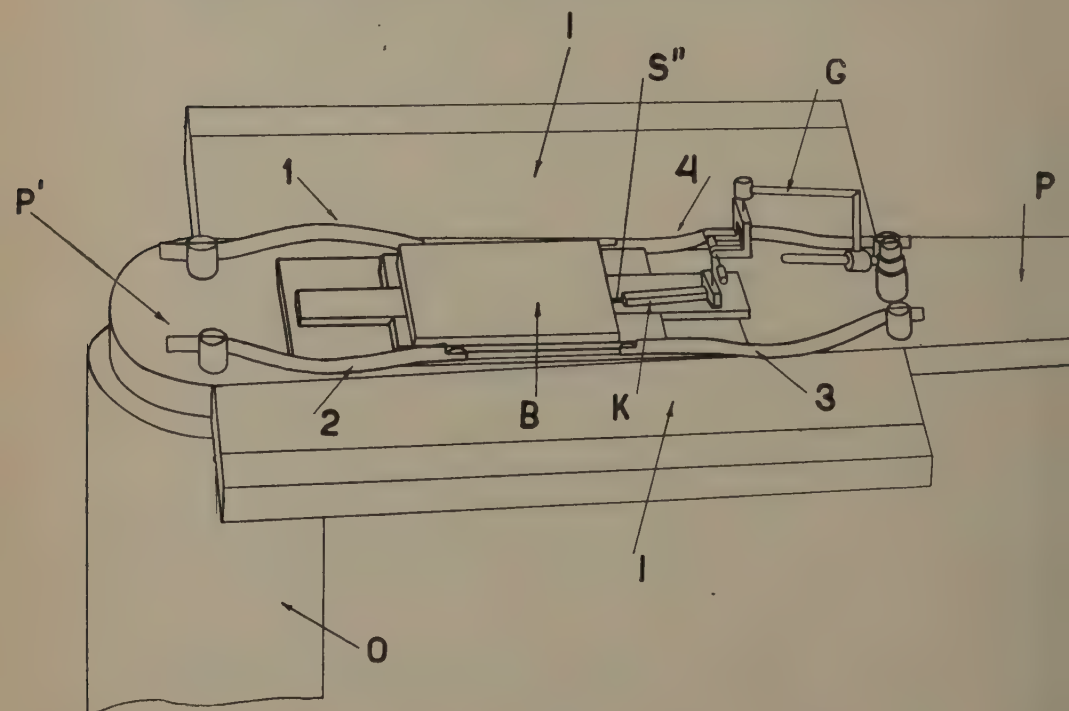
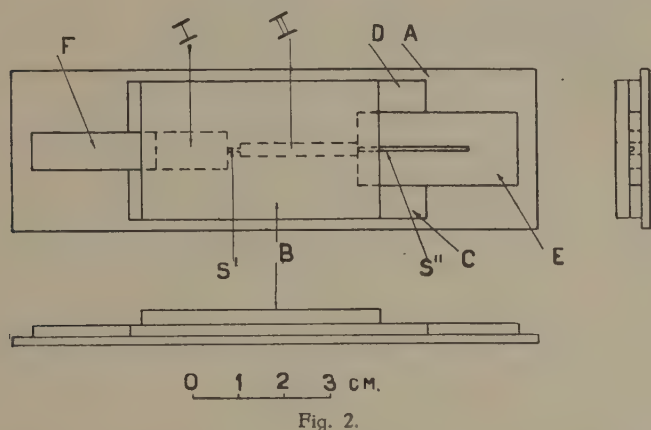


Fig. 1.

Platte ist an der Seite  $P'$  etwas breiter als an der Seite  $P$ . In der Mitte ist sie ganz von der Asbestplatte  $I—I$  umgeben, sodass die Wärme der Platte



nur an der Oberseite und dazu unter Umständen an der Seite *P* abgegeben werden kann. In der Mitte auf dieser Platte liegen lose sechs rechteckige Quarz oder Steatit Platten, welche gut gearbeitet und geschliffen sind. Die eine von diesen Platten ist die grosse Grundplatte *A* (Fig. 2). Die andere vier Platten haben eine solche Form, dass sie zusammen zwei rechteckige



Hohlräume umschliessen, welche wieder von einer grossen Oberplatte *B—B* (Fig. 1, Fig. 2) abgedeckt werden. In diesen von der Luft abgeschlossenen Hohlräumen spielt sich das Kristallisationsprozess ab. In der Figur 2 sind unter *I* und *II* die durch einen Spalt *s'* verbundenen Hohlräume angedeutet worden. Alle Platten werden durch die Federn 1, 2, 3 und 4 (Fig. 1) in der richtigen Lage gehalten. Diese Federn sind so beschaffen dass sie einen geringen Druck in horizontaler Richtung ausüben und so die Platten zusammenhalten. Die obere Platte *B* deckt die Hohlräume ab und wird nicht von einer Feder gehalten.

Rechts in der Figur 1 ist der Impfkristallträger *G* angegeben. Der Impfkristall *K* ist an *G* befestigt und da das ganze System *G* dazu dient um *K* alle Freiheitsgrade zu geben, kann er in jede beliebige Lage gebracht werden. Es ist jedoch zu beachten, dass die vorläufige Orientierung ungefähr richtig sein soll, da der Impfkristall schliesslich eben oberhalb der Grube *s''* (Fig. 2) in der Platte *E* (Fig. 2) liegen soll.

§ 2. *Handhabung des Apparates.* Im Raume *I* (Fig. 2) wird das Wismut zum Schmelzen gebracht. Die flüssige Masse wird mittels der Platte *F* durch die Oeffnung *S'* zum Raume *II* hindurchgepresst und zwar so weit bis ein guter Kontakt mit dem Impfkristall hergestellt ist. Es ist wesentlich, dass der Impfkristall möglichst frisch gemacht, benützt wird.

Es wurde gefunden, dass es nötig ist die inneren Wände der Küvette vor der Kristallisation mit einer dünnen Paraffinschicht zu bedecken. Man vermeidet so :

10. Das Festkleben des Kristalles an die Wände der Küvette ;
20. Die Oxydation des geschmolzenen Wismuts ;
30. Das Festkleben der etwaigen Oxyden an die Kristalloberfläche, da die Oxyde von dem Paraffin benetzt und von der Oberfläche des reinen Metalles losgelöst werden.

Die Impfkristalle hatten die Form von rechteckigen Stäbchen von ziemlich grossen Dimensionen ( $2.5 \times 2.5 \times 22$  mm). Die Spaltfläche (111) konnte in solchen grossen Stäbchen ganz spiegelnd erhalten werden und mit Hilfe des Trägers G wurden sie in der entsprechenden Lage der Küvette orientiert.

Auf diese Weise konnte eine Koordinate des Kristalles nämlich die Richtung der Hauptachse in Bezug auf die äussere Form des zu wachsenden Exemplares festgelegt werden. Die zweite Koordinate wurde durch die Richtung einer der binären Achsen [121] bestimmt. Auf der Spaltfläche (111) treten bei dem Impfkristall Streifen auf, welche Winkel von  $60^\circ$  mit einander bilden. Die Streifenrichtung fällt mit derjenigen zusammen, die man bei Projektion der Flächen  $\{11\bar{1}\}$  und  $\{121\}$  auf die Fläche (111) bekommt. Die Orientierung der binären Achsen geschieht auf folgender Weise: Erstens bestimmt man den Winkel zwischen der Streifenrichtung und dem Kanten des Impfkristalles mittels eines Mikroskops das einen Koordinatentisch hat. Zweitens stellt man mit Hilfe eines Anlegegoniometers die Kanten ein in Bezug auf die Form des Raumes II. Da die Kante vom Impfkristall nicht immer genügend gerade und scharf sind, ist es nur möglich die Orientierung der binären Achsen bis auf 10. festzulegen.

§ 3. *Prüfung der Kristalle.* Um zu sehen ob man es wirklich mit einem Einkristall zu tun hatte, wurde die Oberfläche mit  $HNO_3$  geätzt. Da dieses auf die verschiedenen Kristallflächen verschieden stark einwirkt, kann man leicht feststellen:

10. ob das Exemplar wirklich ein Einkristall ist ;
20. ob die Orientierung des Impfkristalles mit der des angewachsenen Kristalles zusammenfällt.

Eine nähere Prüfung der Orientierung des Kristalles geschieht mittels der Spaltflächen. Wismut spaltet sich sehr leicht und unter einigen Vorsichtsmassregeln kann man die Enden abspalten ohne die übrigen Teile des Kristalles zu beschädigen.

Am meisten wurden die Kristalle in der Form von rechteckigen Stäbchen mit den Dimensionen  $1.5 \times 0.8 \times 22$  mm, und  $2.5 \times 2.5 \times 22$  mm auskristallisiert.

§ 4. *Allgemeine Bemerkungen.* Bei dem Kristallisieren ergeben sich die folgenden Erscheinungen:

10. Der Stab mit der Orientierung der Hauptachse des Kristalles  $\perp$  zur Stablänge wächst leicht unter beliebigen thermischen Bedingungen. Dies ist die stabilste Orientierung des wachsenden Kristalles und sie

entsteht immer von selbst wenn die Kristallisation nicht mit einem Impfkristall hervorgerufen wird. Diese Vorzugsrichtung wurde bekanntlich bei verschiedenen Kristallisationsmethoden an vielen nicht regulär kristallisierenden Metallen gefunden.

2<sup>0</sup>. Der Stab mit der Orientierung der Hauptachse des Kristalles // zur Stablänge wächst nur unter speziellen Bedingungen, und wenn diese nicht erfüllt sind besteht die Möglichkeit, dass der wachsende Kristall als Zwilling wachsen wird oder dass Teile in Zwillingslagen eingeschlossen werden.

Die Bedingungen für gut gewachsene Kristalle sind folgende :

1<sup>0</sup>. Der thermische Gradient der Kupferplatte entlang soll nicht gross sein.

2<sup>0</sup>. Der Impfkristall soll immer von unten gestützt werden, damit nicht der ganze Stab als Zwilling wächst. Es scheint, dass die Schwerkraft genügt um den Kristall bei einer Temperatur nahe am Schmelzpunkte in den Zwilling umzuklappen.

---

**Mathematics.** — *Eine Transformation des  $\infty^6$ -Systemes der rationalen biquadratischen Raumkurven, die durch fünf gegebene Punkte gehen.* Von G. SCHAAKE. (Communicated by Prof. JAN DE VRIES).

(Communicated at the meeting of March 29, 1930).

1. Wir denken uns einen rationalen biquadratischen Kegel  $\kappa^4$  und eine darauf liegende rationale biquadratische Raumkurve  $k^4$ . Weiter nehmen wir eine Gerade  $d$  an. Wenn wir eine Erzeugende  $b$  von  $\kappa^4$  und eine Ebene  $\delta$  durch  $d$ , die sich auf  $k^4$  schneiden, einander zuordnen, bekommen wir eine Verwandtschaft (1.4) zwischen dem Ebenenbüschel mit Achse  $d$  und dem Systeme der Erzeugenden von  $\kappa$ . Diese Verwandtschaft ordnet der durch  $T$  gehenden Ebene  $\delta$  die vier in dieser Ebene liegenden Erzeugenden von  $\kappa$  zu.

Umgekehrt bestimmt eine derartige Verwandtschaft eine Kurve  $k^4$  von  $\kappa^4$ . Nehmen wir nämlich eine allgemeine Verwandtschaft (1.4), so finden wir eine Kurve, die eine willkürliche Ebene durch  $d$  ausserhalb  $d$  in vier Punkten schneidet und die durch die Schnittpunkte von  $d$  mit  $\kappa^4$  geht, also eine Kurve achter Ordnung. Wenn der Ebene  $\delta$  durch  $T$  die vier in  $\delta$  liegenden Erzeugenden von  $\kappa^4$  zugeordnet sind, so lösen diese sich von der Kurve ab und wir erhalten eine Kurve  $k^4$ .

Weil eine allgemeine Verwandtschaft (1.4) durch neun Paare bestimmt wird, ist eine Kurve  $k^4$  auf  $\kappa^4$  durch fünf Punkte dieses Kegels bestimmt.

Wir können denselben Satz beweisen für einen in  $R_4$  vorkommenden Kegel  $\kappa^4$ , wenn wir den Ebenenbüschel  $d$  ersetzen durch einen Büschel von linearen dreidimensionalen Räumen.

2. Die  $\infty^6$  rationalen biquadratischen Raumkurven  $k^4$ , die durch fünf gegebene Punkte  $P_1, \dots, P_5$  eines linearen dreidimensionalen Raumes  $R_3$  gehen, können auf die folgende Weise abgebildet werden auf die Geraden  $l$  eines linearen vierdimensionalen Raumes  $R_4$ , der  $R_3$  enthält.

In  $R_4$  nehmen wir einen Punkt  $T$  an und auf jeder der Geraden  $TP_1, TP_2, \dots, TP_5$  einen Punkt bzw.  $Q_1, \dots, Q_5$ . Eine durch  $P_1, \dots, P_5$  gehende Kurve  $k^4$  wird aus  $T$  projiziert durch einen rationalen biquadratischen Kegel, der eine Kurve  $c^4$  enthält, die durch die fünf Punkte  $Q_i$  geht. Umgekehrt gehört zu jeder Kurve  $c^4$ , die durch die fünf Punkte  $Q_i$  geht, eine durch  $P_1, \dots, P_5$  gehende Kurve  $k^4$ , nämlich die Projektion von  $c^4$  aus  $T$  auf  $R_3$ . Die Kurven  $k^4$ , die durch fünf gegebene Punkte  $P_1, \dots, P_5$  von  $R_3$  gehen, können also abgebildet werden auf die Normalkurven  $c^4$  durch fünf in  $R_4$  liegende Punkte  $Q_1, \dots, Q_5$ .



Wir nehmen nun ein Koordinatenpentaëder an, das seine Eckpunkte hat in  $Q_1, \dots, Q_5$ . Mittelst der Transformation:

$$\rho x'_i = \frac{1}{x_i} \quad (i=1, \dots, 5)$$

wird eine Kurve  $c^4$  transformiert in eine Gerade  $l$  von  $R_4$  und umgekehrt; wir bekommen also wirklich eine Abbildung der Kurven  $k^4$  auf die Geraden  $l$  des vierdimensionalen Raumes  $R_4$ .

3. Zu einer Kurve  $k^4$ , die durch einen gegebenen Punkt  $P_6$  von  $R_3$  geht, gehört eine Kurve  $c^4$ , die die Gerade  $TP_6$  schneidet und umgekehrt. Die Bildgerade  $l$  einer derartigen Kurve  $k^4$  wird also die Kurve  $g^4$  schneiden, in welche  $TP_6$  durch die in § 2 angegebene Transformation transformiert wird. Diese Kurve  $g^4$  ist eine rationale biquadratische Kurve, welche die Punkte  $Q_1, \dots, Q_5$  und den  $T$  zugeordneten Punkt  $T'$  enthält.

*Die Kurven  $k^4$ , die durch einen allgemein gegebenen Punkt von  $R_3$  gehen, werden abgebildet auf die Geraden  $l$  von  $R_4$ , die eine Kurve  $g^4$  schneiden.*

Wir wenden die angegebene Abbildung an auf die Bestimmung der Zahl der rationalen biquadratischen Raumkurven, die durch acht gegebene Punkte eines dreidimensionalen Raumes gehen. Diese Zahl ist gleich der Zahl der Geraden  $l$ , die drei Kurven  $g_1^4$ ,  $g_2^4$  und  $g_3^4$ , welche sechs Punkte,  $Q_1, \dots, Q_5$  und  $T'$ , gemein haben, in verschiedenen Punkten schneiden.

Die Geraden, welche  $g_1^4$  und  $g_2^4$  in verschiedenen Punkten schneiden, bilden eine dreidimensionale Varietät  $V_3$ . Wir fragen nach der Ordnung von  $V_3$ , das ist nach der Zahl der Geraden, die  $g_1^4$ ,  $g_2^4$  und eine gegebene Gerade  $r$  von  $R_4$  in verschiedenen Punkten schneiden. Wir projizieren  $g_1^4$  und  $g_2^4$  aus einem Punkte  $O$  von  $r$  auf  $R_3$ , wodurch die Kurven  $g'_1{}^4$  und  $g'_2{}^4$  entstehen. Die Ordnung von  $V_3$  ist nun gleich der Zahl der Geraden durch den Punkt  $D = R_3 r$ , die  $g'_1{}^4$  und  $g'_2{}^4$  in verschiedenen Punkten schneiden, das ist zehn.

Um zu untersuchen, wievielfache Punkte die Varietät  $V_3^{10}$  in jedem der Punkte  $Q_1, \dots, Q_5$  und  $T'$  hat, bestimmen wir die Anzahl der Geraden, die  $g_1^4$ ,  $g_2^4$  und eine Gerade  $r_1$  durch  $Q_1$  in verschiedenen Punkten schneiden. Projizieren wir  $g_1^4$  und  $g_2^4$  aus  $Q_1$  auf  $R_3$ , so bekommen wir zwei Kurven  $g'_1{}^3$  und  $g'_2{}^3$ , die fünf Punkte gemein haben und wir müssen nun die Anzahl der Geraden durch den Punkt  $r_1$   $R_3$  bestimmen, die  $g'_1{}^3$  und  $g'_2{}^3$  in verschiedenen Punkten schneiden. Diese Anzahl ist vier. Die Varietät  $V_3^{10}$  hat in jedem der Punkte  $Q_i$  und  $T'$  einen sechsfachen Punkt.

Wir finden nun, dass die Kurve  $g_3^4$  die Varietät  $V_3^{10}$  in  $4 \times 10 - 6 \times 6 = 4$  von den Punkten  $Q_i$  und  $T'$  verschiedenen Punkten schneidet;



die Kurven  $g_1^4$ ,  $g_2^4$  und  $g_3^4$  haben also vier Transversalen, die diese Kurven in verschiedenen Punkten schneiden. *Es gibt also vier rationale biquadratische Kurven, die durch acht gegebene Punkte des Raumes gehen.*

§ 4. Die Anzahl der rationalen biquadratischen Raumkurven, die durch sieben gegebene Punkte von  $R_3$  gehen und zwei gegebene Geraden von  $R_3$  schneiden, ist gleich der Zahl der Geraden, die zwei durch  $Q_1, \dots, Q_5$  und  $T'$  gehende Kurven  $g_1^4$  und  $g_2^4$  und zwei Flächen in verschiedenen Punkten schneiden. Die letztgenannten Flächen, die durch die in § 2 angegebene Transformation aus zwei durch  $T$  gehende Ebenen entstehen, sind durch  $T'$  gehende Flächen sechster Ordnung  $\omega_1^6$  und  $\omega_2^6$  mit dreifachen Punkten in  $Q_1, \dots, Q_5$ , welche die zehn Geraden  $Q_i$   $Q_k$  enthalten.

Die Fläche  $\Phi$  der Geraden, die  $g_1^4$ ,  $g_2^4$  und eine Ebene  $\alpha$  in verschiedenen Punkten schneiden, hat mit  $\alpha$  eine Kurve zehnter Ordnung und mit einem Raume durch  $\alpha$  überdies 16 Geraden gemein. Hieraus folgt, das  $\Phi$  von der Ordnung 26 ist.

Wenn wir statt  $\alpha$  eine Ebene durch  $Q_1$  nehmen, so finden wir eine Varietät von der Ordnung 19. Hieraus ergibt sich, das  $\Phi$  in den Punkten  $Q_1, \dots, Q_5$  und  $T'$  siebenfache Punkte besitzt.

Die Anzahl der von  $Q_1, \dots, Q_5$  und  $T'$  verschiedenen Schnittpunkte von  $\Phi$  mit  $\omega_2^6$  ist 44. Die Fläche  $\Psi$  der Geraden, die  $g_1^4$ ,  $g_2^4$  und  $\omega_1^6$  in verschiedenen Punkten schneiden, ist also von der Ordnung 44.

Die durch  $Q_1$  gehenden Geraden von  $\Psi$  sind:

1. Die drei Geraden, welche  $Q_1$  verbinden mit den drei von  $Q_1$  verschiedenen Schnittpunkten von  $\omega_1^6$  mit der gemeinsamen Tangentialebene von  $g_1^4$  und  $g_2^4$  in  $Q_1$ .

2. Die fünf Geraden, welche  $Q_1$  verbinden mit den fünf von  $Q_1, \dots, Q_5$  verschiedenen Schnittpunkten von  $g_2^4$  mit dem kubischen Bikegel, der besteht aus den Ebenen, welche die Tangente in  $Q_1$  an  $g_1^4$  verbinden mit den Erzeugenden des Tangentialkegels von  $\omega_1^6$  in  $Q_1$ .

3. Die fünf Geraden, die gefunden werden, wenn wir in 2<sup>o</sup> die Kurven  $g_1^4$  und  $g_2^4$  vertauschen.

Die Punkte  $Q_1, \dots, Q_5$  sind also dreizehnfache Punkte von  $\Psi$ .

In derselben Weise finden wir, dass  $T'$  ein elfacher Punkt von  $\Psi$  ist.

Die Fläche  $\omega_2^6$  hat also mit  $\Psi$  58 von  $Q_1, \dots, Q_5$  und  $T'$  verschiedene Punkte gemein, und es gibt 58 Geraden, die  $g_1^4$ ,  $g_2^4$ ,  $\omega_1^6$  und  $\omega_2^6$  in verschiedenen Punkten schneiden.

*Es gibt 58 rationale biquadratische Raumkurven, die durch sieben gegebene Punkte des Raumes gehen und zwei gegebene Geraden des Raumes schneiden.*

Wir bemerken noch, dass die rationalen biquadratischen Kurven, die durch  $P_1, \dots, P_5$  gehen und eine gegebene Ebene berühren, abgebildet werden auf die Tangenten einer biquadratischen Hyperfläche  $V_3^4$ , die dreifache Punkte besitzt in  $Q_1, \dots, Q_5$ .

5. Wenn wir auf die Varietät  $V_3^{10}$ , die gebildet wird von den Transversalen der Kurven  $g_1^4$  und  $g_2^4$ , die Transformation:

$$\varrho x_i = \frac{1}{x_i'},$$

anwenden, so finden wir eine andere Varietät  $V_3'^{10}$ , die besteht aus den Kurven  $c^4$  durch  $Q_1, \dots, Q_5$ , welche zwei durch  $T$  gehende Geraden  $TP_6$  und  $TP_7$  schneiden und, projiziert auf  $R_3$ , die rationalen Kurven  $k^4$  geben, welche durch  $P_1, \dots, P_7$  gehen.

Die Varietät  $V_3'^{10}$  hat einen sechsfachen Punkt in  $T$ ; auch die Punkte  $Q_1, \dots, Q_5$  sind sechsfache Punkte von  $V_3'^{10}$ . Eine Gerade  $t$  durch  $T$  schneidet  $V_3'^{10}$  ausserhalb  $T_4$  viermal, die vier geschnittenen Kurven  $c^4$  geben projiziert die Kurven  $k^4$  der Kongruenz  $C$  mit den Hauptpunkten  $P_1, \dots, P_7$  welche durch den Spurpunkt  $tR_3$  von  $t$  gehen.

Ein Fokalkpunkt  $F$  der Kongruenz ist ein Punkt, wofür zwei der vier durch  $F$  gehenden Kurven zusammenfallen, also ein Spurpunkt einer durch  $T$  gehenden Tangente von  $V_3'^{10}$ . Mit Hilfe dieser Bemerkung finden wir, dass jede Kurve  $k^4$  von  $C$  drei von den Hauptpunkten verschiedene Fokalkpunkte enthält, wodurch eine mit  $k^4$  zusammenfallende Kurve der Kongruenz geht. Denn eine Kurve  $c^4$  schneidet die Polvarietät von  $T$  für  $V_3^{10}$  in drei Punkten, die von den fünf fünffachen Punkten verschieden sind und nicht zu den zwei vierfachen Geraden gehören. Die Fokalfläche von  $C$  ist die Projektion auf  $R_3$  des Schnittes von  $V_3^{10}$  mit der ersten Polvarietät von  $T$  für  $V_3^{10}$ .

6. Wir besprechen noch kurz eine andere Transformation, nämlich eine des  $\infty^8$ -Systemes der rationalen Raumkurven  $k^4$ , die durch drei gegebene Punkte  $P_1, P_2$  und  $P_3$  gehen und die gegebene Gerade  $d$  zweimal schneiden.

Um zu dieser Transformation zu gelangen, betrachten wir den Komplex  $\Gamma$  der quadratischen Flächen  $\varphi^2$  durch  $P_1, P_2, P_3$ , die  $d$  enthalten. Weiter denken wir uns eine kollineare Verwandtschaft zwischen den Flächen  $\varphi^2$  von  $\Gamma$  und den Ebenen des Raumes. Ein Punkt  $P$  des Raumes trägt ein Netz von quadratischen Flächen  $\varphi^2$ ; hierzu gehört ein Ebenenbündel mit dem Mittelpunkt  $P'$ . Wir bekommen so eine eindeutige Verwandtschaft  $(P, P')$ .

Die rationalen Raumkurven  $k^4$ , die durch  $P_1, P_2, P_3$  gehen und  $d$  zweimal schneiden, werden transformiert in die kubischen Raumkurven, die drei Geraden und eine Transversale dieser drei Geraden schneiden.

Die Anzahl der kubischen Raumkurven, die durch vier gegebene Punkte gehen und diese vier Geraden schneiden, kann auf zweierlei Weise bestimmt werden. Zunächst nehmen wir die Eckpunkte des Koordinatentetraeders in den vier Punkten und wenden wir die Transformation:

$$\varrho x_i' = \frac{1}{x_i} \quad (i = 1, \dots, 4)$$



an. Dann müssen wir die Anzahl bestimmen der Geraden, die vier kubische Raumkurven, welche durch die vier Eckpunkte gehen und wovon eine die drei anderen Kurven noch einmal trifft, in verschiedenen Punkten schneiden. Wir finden dann 15 Geraden, es giebt also 15 Kurven  $k^3$ , welche die genannten Bedingungen erfüllen.

Dasselbe Ergebnis finden wir, wenn wir darauf achten, dass die Kurven durch vier gegebene Punkte, die drei gegebene windschiefe Geraden schneiden, eine Fläche 30<sup>er</sup> Ordnung bilden, wofür die gegebenen Geraden fünffache Geraden sind. Eine Transversale der drei gegebenen Geraden schneidet also 15 Kurven  $k^3$  der Fläche je in einem Punkte, der nicht auf einer der gegebenen Geraden liegt.

*Es giebt also fünfzehn rationale biquadratische Raumkurven, die durch sieben gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade zweimal schneiden.*

Die Kongruenz der rationalen biquadratischen Raumkurven durch sieben gegebene Punkte ist also eine Kongruenz (4, 15).

Die rationalen biquadratischen Kurven  $k^4$  durch die Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  und  $P_5$  werden, wenn  $P_4$  und  $P_5$  zwei Punkte von  $d$  sind, transformiert in die kubischen Raumkurven, die sechs Geraden schneiden, wovon drei zur einen und drei zur anderen Regelschar einer quadratischen Fläche gehören. Unsere Kongruenz wird also transformiert in die der kubischen Raumkurven durch zwei Punkte  $P'_6$  und  $P'_7$ , welche die sechs genannten Geraden in verschiedenen Punkten schneiden.

Mittelst der von SCHUBERT gefundenen Anzahlen von Kurven  $k^3$  findet man, dass durch  $P'_6, P'_7$  und  $P'_8$  vier Kurven  $k^3$  gehen, welche die sechs genannten Geraden in verschiedenen Punkten schneiden. Denn die Zahl dieser Kurven ist:

$$P^3, P^6 - 9 P^4, P^4 + 18 P^5, P^2 - 6 P^6 = 190 - 270 + 99 - 6 = 4.$$

Hieraus folgt wieder, dass es vier rationale Kurven  $k^4$  giebt, die durch acht gegebene Punkte gehen.

§ 7. Eine dritte Transformation bekommen wir, wenn wir die  $\infty^4$  quadratischen Flächen  $\omega^2$  betrachten, die durch  $P_1, \dots, P_5$  gehen.

Wir denken uns eine kollineare Verwandtschaft zwischen den Flächen dieses linearen  $\infty^4$ -Systemes und den Hyperebenen eines Raumes  $R_4$ . Den Flächen  $\omega^2$  durch einen Punkt  $P$  sind die Hyperebenen durch einen Punkt  $P'$  von  $R_4$  zugeordnet. Die Punkte  $P'$  bilden dann eine kubische Varietät; diese besteht aus den Geraden, welche fünf assoziierte Ebenen schneiden. Die Varietät enthält 15 Ebenen. Die Kurven  $k^4$  durch  $P_1, \dots, P_5$  werden transformiert in die kubischen Kurven dieser Varietät, welche die 15 Ebenen schneiden.

Den rationalen biquadratischen Kurven der ersten Art durch  $P_1, \dots, P_5$  sind die Durchschnitte der Varietät mit ihren Berührungsebenen zugeordnet.